

Dipl.-Kfm. Ansgar Ostermann

# Grundwissen Mathematik für die Wertpapieranalyse



## **Vorwort**

Seit vielen Jahren bin ich im Handel mit High Yield Bonds aktiv, dem ohne Anwendung mathematischer Methoden ein wesentliches Fundament fehlen würde. Es entstand daher die Idee, ausgewählte elementare Grundlagen der Mathematik in einem Skript zusammenzufassen.

Das vorliegende Skript führt in jene Grundlagen der Mathematik ein, die erforderlich sind, um die wissenschaftliche Fachliteratur zur Wertpapieranalyse nachvollziehen zu können. Es steht dabei nicht der mathematische Formalismus im Vordergrund, sondern die Verdeutlichung von Rechentechniken.

Ich freue mich über Anregungen, Kritik, Fehlerhinweise und Verbesserungsvorschläge, die Sie an folgende E-Mail-Adresse richten können:

[ieff-professional@freenet.de](mailto:ieff-professional@freenet.de)

Berlin, im Dezember 2025  
Ansgar Ostermann

# Gliederung

1. Zahlenmengen
2. Grundrechenarten
3. Brüche
4. Potenzen
5. Wurzeln
6. Logarithmen
7. Beträge
8. Funktionen
9. Termumformungen, binomische Formeln
10. Termumformungen mittels Polynomdivision
11. Termumformungen mittels Faktorisierung
12. Termumformungen mittels Partialbruchzerlegung
13. Grundlagen der Lösung von Gleichungs- und Ungleichungssystemen
14. Lösung von quadratischen Gleichungen
15. Lösung von Gleichungssystemen mittels Satz vom Nullprodukt
16. Lösung von Gleichungssystemen mittels Additionsverfahren
17. Lösung von Gleichungssystemen mittels Gauß-Algorithmus
18. Lösung von Gleichungssystemen mittels Substitution
19. Ungleichungen
20. Folgen, Reihen, Zinseszinsrechnung
21. Differentialrechnung – Grundlagen der Ableitung –
22. Differentialrechnung – Definitionsbereich (= Definitionsmenge) –
23. Differentialrechnung – Definitionslücken, Asymptoten –
24. Differentialrechnung – Grenzwertrechnung –
25. Differentialrechnung – Extrempunkte, Wendepunkte, Sattelpunkte –
26. Differentialrechnung – Monotonie –
27. Differentialrechnung – Krümmungsverhalten –
28. Differentialrechnung – Wertebereich (= Wertemenge) –
29. Differentialrechnung – Symmetrie –
30. Differentialrechnung – Kurvendiskussion –
31. Differentialrechnung – partielles Differential –
32. Differentialrechnung – totales Differential –
33. Differentialrechnung – Extrempunkt bei mehrdimensionalen Funktionen –
34. Elastizität
35. Integralrechnung – Grundlagen –
36. Integralrechnung – Kurvenlängen und Flächen –
37. Geometrie
38. Trigonometrie

# 1. Zahlenmengen

- **Dezimalzahlen**

Das Dezimalsystem ist dasjenige Zahlensystem, welches sich als internationaler Standard etabliert hat. In seinem Aufbau ist es ein Stellenwertsystem mit der Basis zehn und mit zehn verschiedenen Ziffern. Die Zahlzeichen werden aus den Dezimalziffern von 0 bis 9 und aus deren Aneinanderreihung gebildet. In dieser Form ist das Dezimalsystem für ganze Zahlen einsetzbar und auch – ergänzt durch ein Dezimalzeichen<sup>1</sup> – für nicht-ganze Zahlen. Es wird auch als Zehnersystem oder Dekadisches System bezeichnet.

Der Wert einer dreistelligen natürlichen Zahl ergibt sich aus ihren drei Ziffernwerten  $a_0, a_1, a_2$  wie folgt:

$$a_0 \cdot b^0 + a_1 \cdot b^1 + a_2 \cdot b^2$$

Die Basis  $b$  ist im Dezimalsystem = 10.

Beispiel:

694

$$4 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^2 = 694$$

Dezimalzahlen sind grundsätzlich alle Zahlen, die im Stellensystem mit der Basis 10 (Dezimalsystem) aufgeschrieben werden. Das heißt, im weiteren Sinne ist die Zahl  $-1,5$  ebenso eine Dezimalzahl wie 2 oder  $\pi$  ( $= 3,141592653589793\dots$ ).

Bei den Kommazahlen unter den Dezimalzahlen, also jenen Dezimalzahlen die in Zifferndarstellung mindestens eine Stelle hinter dem Komma haben die nicht 0 ist, werden drei Arten unterschieden:

## (i) **Abbrechende Dezimalzahlen**

Abbrechende Dezimalzahlen haben nur endlich viele Nachkommastellen, die nicht null sind, bzw. ab irgendeiner Nachkommastelle nur noch Nullen. Sie entsprechen den Dezimalbrüchen, also den Brüchen mit einer Zehnerpotenz im Nenner. Alle Bruchzahlen, deren Nenner nur die Primfaktoren 2 und 5 enthalten, lassen sich zu einem solchen Dezimalbruch mit abbrechender Dezimaldarstellung erweitern.

Beispiele:

$$\frac{7}{20} = \frac{7}{2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{35}{100} = 0,35$$

---

<sup>1</sup> Das Dezimalzeichen bzw. Dezimaltrennzeichen (vor allem der Dezimalpunkt und das Dezimalkomma, meist kurz Punkt und Komma) ist im Dezimalsystem ein Zeichen, das die Grenze zwischen dem ganzzahligen Teil und dem gebrochenen Teil einer Zahl angibt.

$$\frac{7}{8} = \frac{7}{2 * 2 * 2} = \frac{7 * 12 \frac{1}{2}}{2 * 2 * 2 * 12 \frac{1}{2}} = \frac{87 \frac{1}{2}}{100} = 0,875$$

## (ii) Periodische Dezimalzahlen

Bei periodischen Dezimalzahlen wiederholt sich ab einer bestimmten Stelle hinter dem Komma eine Ziffer oder Ziffernfolge immer weiter bis ins Unendliche. Diese wird dann mit einem Überstrich über der Ziffernfolge notiert:

$$\frac{7}{6} = 1, \overline{16}$$

Eine Dezimalzahl ist reinperiodisch, wenn die Periode direkt nach dem Komma beginnt (z.B.  $3, \overline{1}$ ) und gemischtperiodisch, wenn davor noch andere Ziffern stehen (z.B.  $3,698\overline{5}$  oder  $0,755\overline{6}$ ).

Abbrechende und periodische Dezimalzahlen sind rationale Zahlen.

## (iii) Irrationale Zahlen

Irrationale Zahlen entsprechen Dezimalzahlen, die weder abbrechen noch jemals eine Periode zeigen. Solche nicht abbrechenden und nicht periodischen Dezimalzahlen lassen sich immer nur angenähert aufschreiben, exakt ist nur die Angabe eines Symbols wie  $e$ ,  $\pi$  oder  $\sqrt{2}$ .

- **Natürliche Zahlen** ( $\mathbb{N}$ )

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

Die Menge aller natürlichen Zahlen ohne die Null kann man auch schreiben als:  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ; der Schrägstrich heißt hier so viel wie "ohne".

- **Natürliche Zahlen einschließlich der Zahl 0** ( $\mathbb{N}_0$ )

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

- **Primzahlen** ( $p$ )

Eine natürliche Zahl  $p$  heißt Primzahl, wenn  $p \neq 1$  ist und wenn  $p$  nur durch 1 und sich selbst teilbar ist:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ...

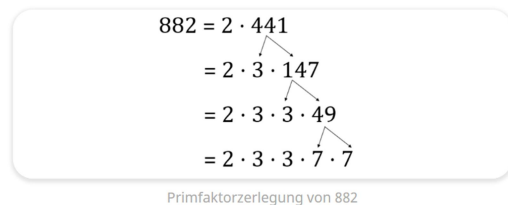
Satz des Euklid: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Die Primfaktorzerlegung ist die Darstellung einer positiven natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  als Produkt aus Primzahlen  $p \in \mathbb{P}$ , die dann als Primfaktoren von  $n$  bezeichnet

werden. Für jede natürliche Zahl größer als 1 ist eine Primfaktorzerlegung möglich.

### Beispiele:

Zerlege 882 in Primzahlen.



Zerlege 945 in Primzahlen.

$$945 = 3 * 3 * 3 * 7 * 5$$

- **Ganze Zahlen ( $\mathbb{Z}$ )**

$$\mathbb{Z} = \{ \dots - 7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots \}$$

- **Negative ganze Zahlen ( $\mathbb{Z}^-$ )**

$$\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$$

$$\mathbb{Z}^- = \{ -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, \dots \}$$

- **Positive ganze Zahlen ( $\mathbb{Z}^+$ )**

$$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$$

- **Gerade Zahlen ( $\mathbb{Z}_G$ )**

Eine gerade Zahl ist eine ganze Zahl, die sich ohne Rest durch zwei teilen lässt. Diese Menge der geraden Zahlen umfasst die positiven und negativen geraden ganzen Zahlen sowie die Null.

$$\mathbb{Z}_G = \{ \dots, -12, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots \}$$

- **Ungerade Zahlen ( $\mathbb{Z}_U$ )**

Eine ungerade Zahl ist eine ganze Zahl, die sich nicht ohne Rest durch zwei teilen lässt. Die Menge der ungeraden Zahlen umfasst die positiven und negativen ungeraden Zahlen. Sie enden immer auf 1, 3, 5, 7 oder 9.

$$\mathbb{Z}_U = \{ \dots, -11, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots \}$$

- **Rationale Zahlen ( $\mathbb{Q}$ )**

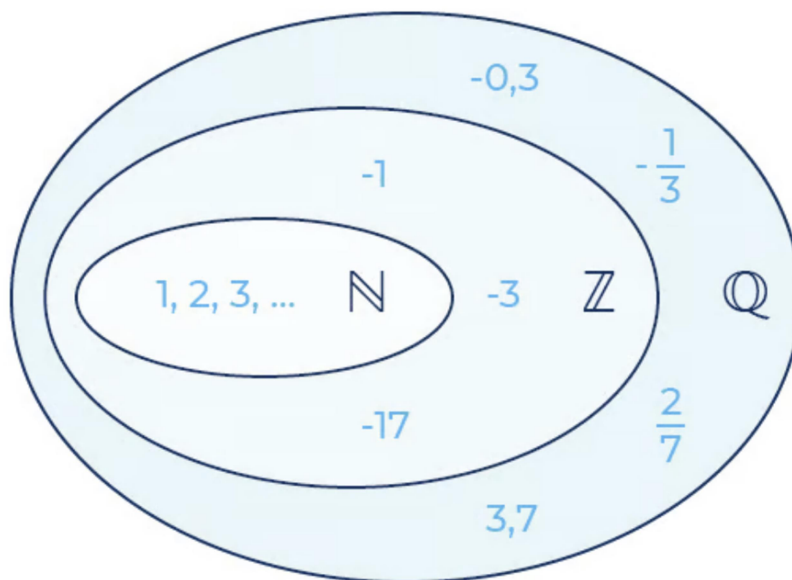
Z.B.  $-5\frac{3}{7}, -3, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{8}, -0,5, 0, 1, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 5\frac{3}{8}, 179, \dots$

Rationale Zahlen (= gebrochene Zahlen) umfassen alle natürlichen Zahlen, ganzen Zahlen, Brüche und Dezimalzahlen, die sich als Bruch darstellen lassen. Die Menge der rationalen Zahlen besteht aus der Menge der negativen rationalen Zahlen, der Zahl Null und der Menge der positiven rationalen Zahlen.

$\mathbb{Q}^+$  Positive rationale Zahlen (ohne 0)

$\mathbb{Q}^-$  Negative Rationale Zahlen (ohne 0)

Rationale Zahlen



- **Bruchzahlen ( $\mathbb{B}$ )**

$$\mathbb{B} = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$$

Z.B.  $-5\frac{3}{7}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 5\frac{3}{8}, \dots$

- **Reelle Zahlen ( $\mathbb{R}$ )**

Reelle Zahlen umfassen die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen. Eine nicht-rationale Zahl heißt **irrationale Zahl**.

Irrationale Zahlen sind Zahlen, die sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lassen und deren Dezimaldarstellung unendlich viele nicht-periodische Stellen nach dem Komma hat. Bekannte Beispiele sind die Kreiszahl  $\pi$ , die Euler-

sche Zahl  $e$ , und die Quadratwurzeln aus Nicht-Quadratzahlen wie  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  oder  $\sqrt{5}$ .

Irrationale Zahlen haben die folgenden Eigenschaften:

- ➔ Sie sind nicht als Bruch darstellbar.
- ➔ Sie haben unendlich viele Nachkommastellen (Dezimaldarstellung bricht nicht ab).
- ➔ Sie haben Nachkommastellen, die nicht periodisch sind.

Die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen sind keine Teilmenge der irrationalen Zahlen.

$\mathbb{R}^+$  Positive reelle Zahlen (ohne 0)

$\mathbb{R}^-$  Negative reelle Zahlen (ohne 0)

- **Komplexe Zahlen  $\mathbb{C}$**

Komplexe Zahlen umfassen die reellen Zahlen und die imaginären Zahlen.

Die komplexen Zahlen stellen eine Erweiterung der reellen Zahlen dar. Ziel der Erweiterung ist es, algebraische Gleichungen wie  $x^2 + 1 = 0$  oder  $x^2 = -1$  lösbar zu machen. Da die Quadrate aller reellen Zahlen größer oder gleich 0 sind, kann die Lösung der Gleichung  $x^2 = -1$  keine reelle Zahl sein. Man braucht eine ganz neue Zahl, die man üblicherweise  $i$  nennt, mit der Eigenschaft  $i^2 = -1$ . Diese Zahl  $i$  wird als imaginäre Einheit bezeichnet.

Komplexe Zahlen werden als Summe  $a + i * b$  definiert, wobei  $a$  als Realteil (= reeller Teil) und  $b$  als Imaginärteil (= imaginäre Teil) bezeichnet werden. Beides sind reelle Zahlen. Die Zahl  $i$  ist die oben definierte imaginäre Einheit. Auf die so definierten komplexen Zahlen lassen sich die üblichen Rechenregeln für reelle Zahlen anwenden, wobei  $i$  wie eine Konstante verwendet wird und  $i^2$  durch  $-1$  ersetzt werden kann und umgekehrt. Für die Menge der komplexen Zahlen wird das Symbol  $\mathbb{C}$  verwendet.

Eine (rein) imaginäre Zahl (Imaginärzahl) ist eine komplexe Zahl, deren Quadrat eine nichtpositive reelle Zahl ist. Äquivalent dazu kann man die imaginären Zahlen als diejenigen komplexen Zahlen definieren, deren Realteil 0 ist.

Wie die reellen Zahlen aus der Einheit 1 hervorgehen, basieren die imaginären Zahlen auf der imaginären Einheit  $i$ , einer nichtreellen Zahl mit der Eigenschaft  $i^2 = -1$  bzw.  $i = \sqrt{-1}$ .

Wenn der Radikant eine negative Zahl ist, gibt es keine reelle Zahl als Quadratwurzel. Man setzt für  $\sqrt{-1}$  die Zahl  $i$  und nennt sie eine **imaginäre Einheit**. Das Produkt der imaginären Einheit  $i$  mit einem reellen Faktor  $b$

$$b * i$$

ist stets eine imaginäre Zahl. Und auch umgekehrt ist jede imaginäre Zahl ein reelles Vielfaches der imaginären Einheit.

$$\sqrt{-1} = i$$

$$\sqrt{-b} = b * i$$

**Für die Lösungen der Gleichung  $x^2 = -1$  gilt:**

$$x_1 = i$$

$$x_2 = -i$$

Qua Definition gilt für die imaginäre Einheit:

$$i^2 = -1$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Wenn man  $-i$  mit sich selbst multipliziert, gilt:

$$(-i)^2 = (-i) * (-i) = ((-1) * (-1)) * (i * i) = (1) * (-1) = -1$$

Wenn  $i^2 = -1$  und  $(-i)^2 = -1$ , dann gilt auch:

$$\sqrt{i^2} = i = \sqrt{-1}$$

$$\sqrt{(-i)^2} = -i = \sqrt{-1}$$

Und somit:

$$\sqrt{-1} = \pm i$$

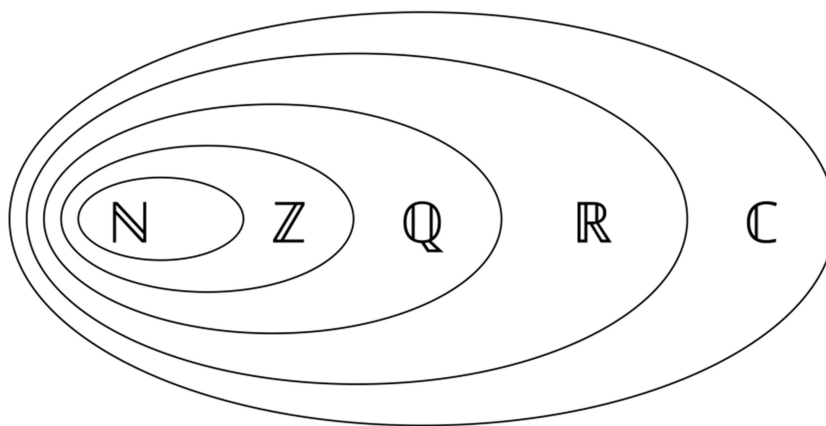
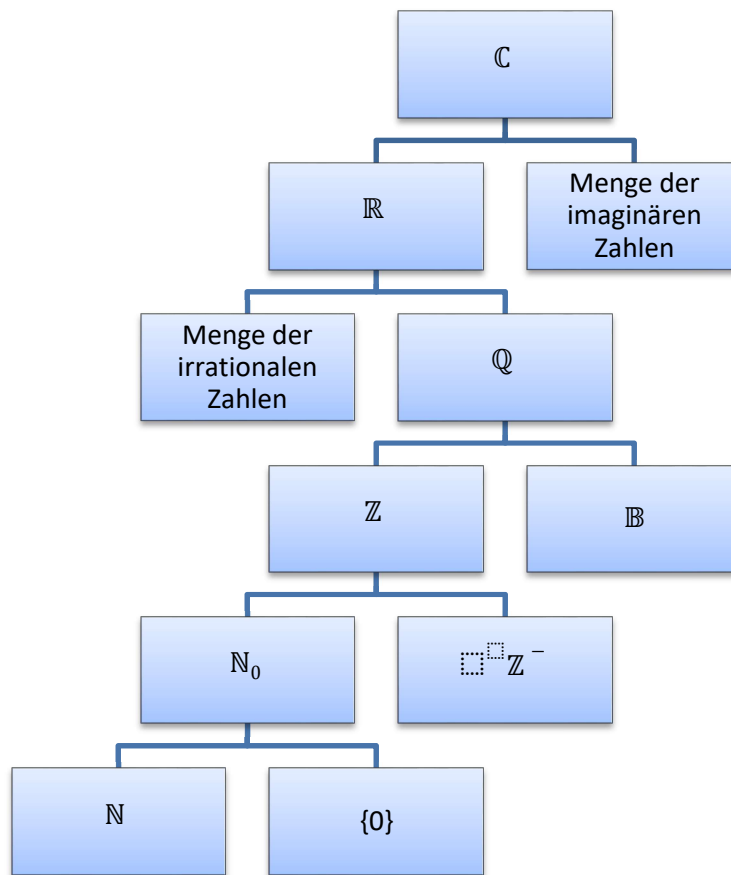
Beispiele:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 * (-1)} = \sqrt{4} * \sqrt{-1} = 2 * \sqrt{-1} = 2 * i$$

$$\sqrt{-7} = \sqrt{7 * (-1)} = \sqrt{-1} * \sqrt{7} = i * \sqrt{7}$$

Jede komplexe Zahl lässt sich als Summe einer reellen und einer imaginären Zahl darstellen. Komplexe Zahlen werden als Summe  $a + i * b$  definiert, wobei  $a$  und  $b$  als Imaginärteil bezeichnet wird. Beides sind reelle Zahlen. Eine komplexe Zahl mit  $a = 0$  heißt imaginäre Zahl.

- Einteilung der Zahlen



## 23. Differentialrechnung – Definitionslücken, Asymptoten –

- Bei gebrochenrationalen Funktionen treten wegen Nullstellen im Nenner **Definitionslücken** auf. Definitionslücken werden unterschieden in **hebbare Lücken** und **Polstellen**. Hebbare Lücken lassen sich gegen den Zähler wegekürzen und werden dadurch eliminiert. Formal bleiben hebbare Lücken allerdings Definitionslücken. Unter einer Polstelle versteht man eine Definitionslücke einer Funktion. Die Funktion hat an dieser Stelle eine senkrechte **Asymptote**. An Polstellen laufen Funktionen immer gegen  $+\infty$  bzw. gegen  $-\infty$ . Eine Polstelle ist eine Definitionslücke bei gebrochen-rationalen Funktionen, bei der sich der Funktionsgraph der senkrechten Asymptote unendlich stark annähert, ohne sie jemals zu berühren. Eine Asymptote ist eine Gerade oder eine Kurve, an die sich ein Funktionsgraph im Unendlichen immer weiter annähert. Asymptoten sind insbesondere bei gebrochenrationalen Funktionen relevant. Es gibt senkrechte, waagerechte, schiefe und kurvenförmige Asymptoten:
- Um Asymptoten berechnen bzw. nachfolgende Regeln anwenden zu können, müssen u.U. Terme zu einem Bruch zusammengefasst werden.

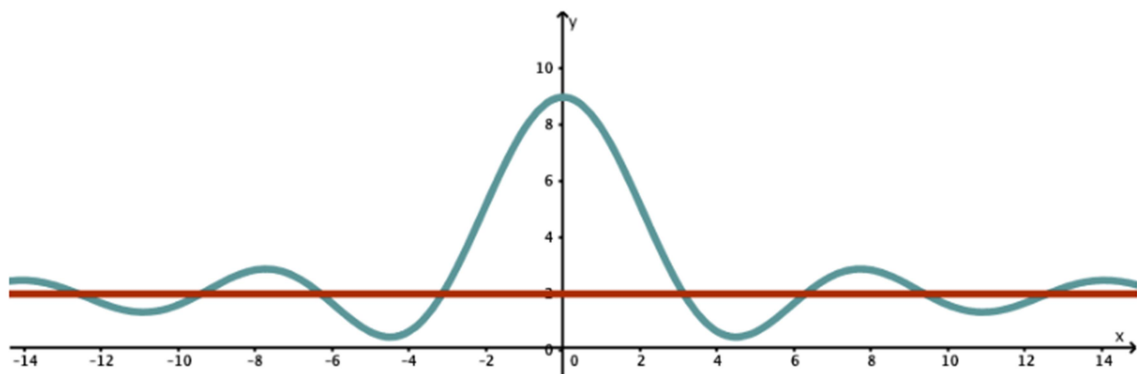
Beispiel:

$$f(x) = x^2 + x^{-2} = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

- Asymptoten kommen nicht nur bei gebrochenrationalen Funktionen vor sondern sind auch bei anderen Funktionsarten möglich.
- Asymptoten schließen nicht aus, dass sie vom Graph berührt, geschnitten oder mit ihm deckungsgleich werden.

Beispiel:

Asymptote:  $y = 2$



- Senkrechte (vertikale) Asymptoten**

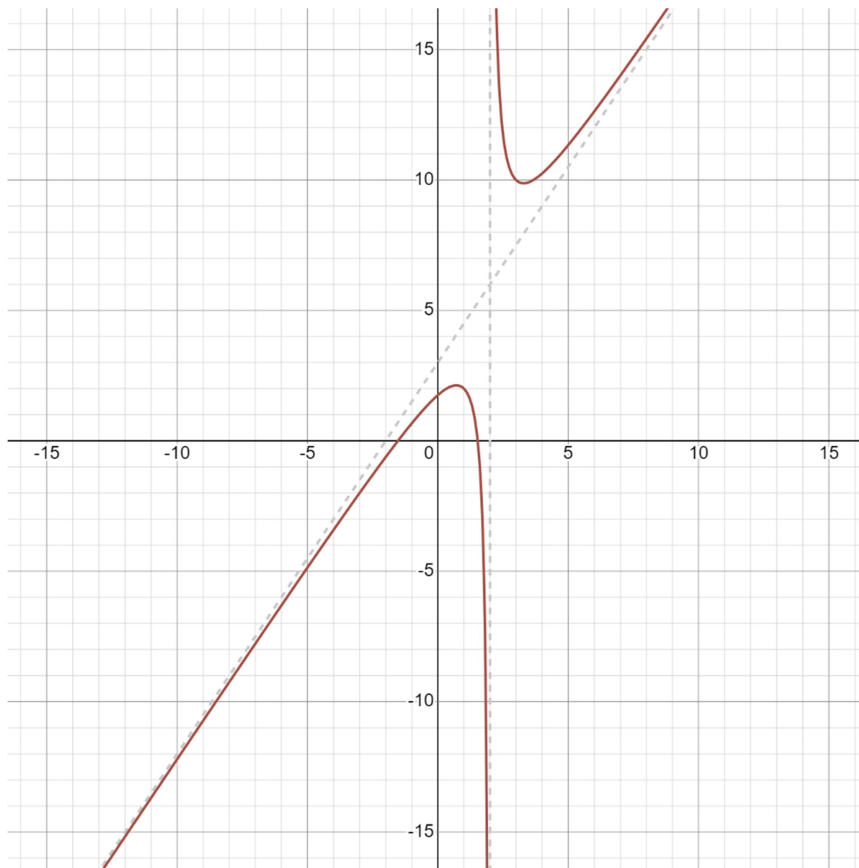
$$f(x) = \frac{3x^2 - 7}{2x - 4}$$

Etwaige Nullstellen des Nenners ermitteln:

$$x = 2$$

Anschließend ist zu prüfen, ob  $x = 2$  auch eine Nullstelle des Zählers ist. Falls dies der Fall wäre, läge an der Stelle  $x = 2$  keine Asymptote, sondern lediglich eine hebbare Lücke vor. Dies ist hier jedoch nicht der Fall.

Die Senkrechte für  $x = 2$  ist keine Funktion.



Für den Fall, dass auch der Zähler für eine Nullstelle des Nenners zu 0 wird, wie beispielsweise bei der Funktion

$$f(x) = \frac{(x-2) * x}{2x-4}$$

für  $x = 2$ , existiert keine senkrechte Asymptote. Identische Nullstellen für Zähler und Nenner zeigen Kürzbarkeit an:

$$f(x) = \frac{(x-2) * x}{2x-4} = \frac{x}{2}$$

Da der Nenner mithin gar nicht 0 werden kann, existiert auch keine hebbare Lücke.

- **Waagerechte (= horizontale) Asymptoten**

Waagerechte Asymptoten erfordern einen geringeren oder gleichen Zähler- als Nennergrad.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{4x^3 - 2}$$

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x}{4x^3 - 2}$$

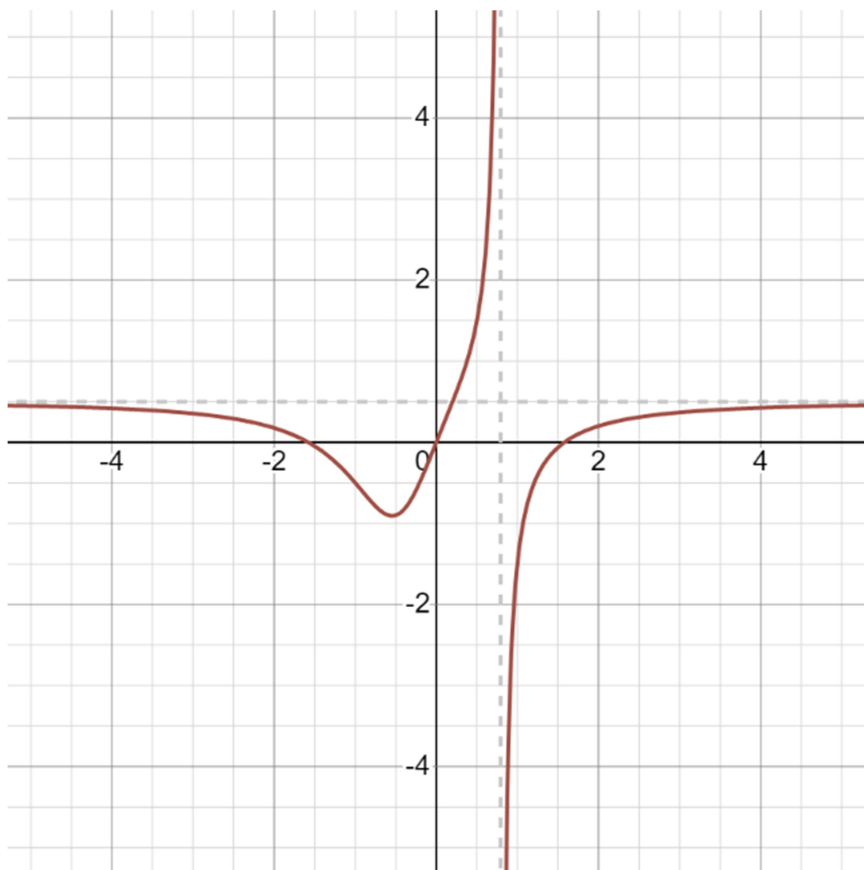
Eine waagerechte Asymptote wird berechnet indem man den Grenzwert der Funktion für  $x \rightarrow +\infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  ermittelt. Wenn die Grenzwerte eine endliche Zahl L ergeben, ist die waagerechte Asymptote die Gerade  $y = L$ .

Ist der Zählergrad geringer als der Nennergrad, ergibt sich als Asymptote immer die waagerechte Gerade  $y = 0$ .

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{4x^3 - 2} \Rightarrow \text{Asymptote: } y = 0$$

Ist der Zählergrad gleich dem Nennergrad, ergibt sich die waagerechte Asymptote als Bruch der Faktoren vor den Variablen mit den höchsten Potenzen.

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x}{4x^3 - 2} \Rightarrow \text{Asymptote: } y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



Ergibt sich beim Lauf gegen  $\pm\infty$  eine Zahl, ist dies i.d.R. die waagerechte Asymptote. Dies gilt für alle Arten von Funktionen und nicht nur bei gebrochenrationalen Funktionen.

- **Schiefe (= schräge) Asymptoten**

Schiefe Asymptoten erfordern einen um 1 höheren Zähler- als Nennergrad.

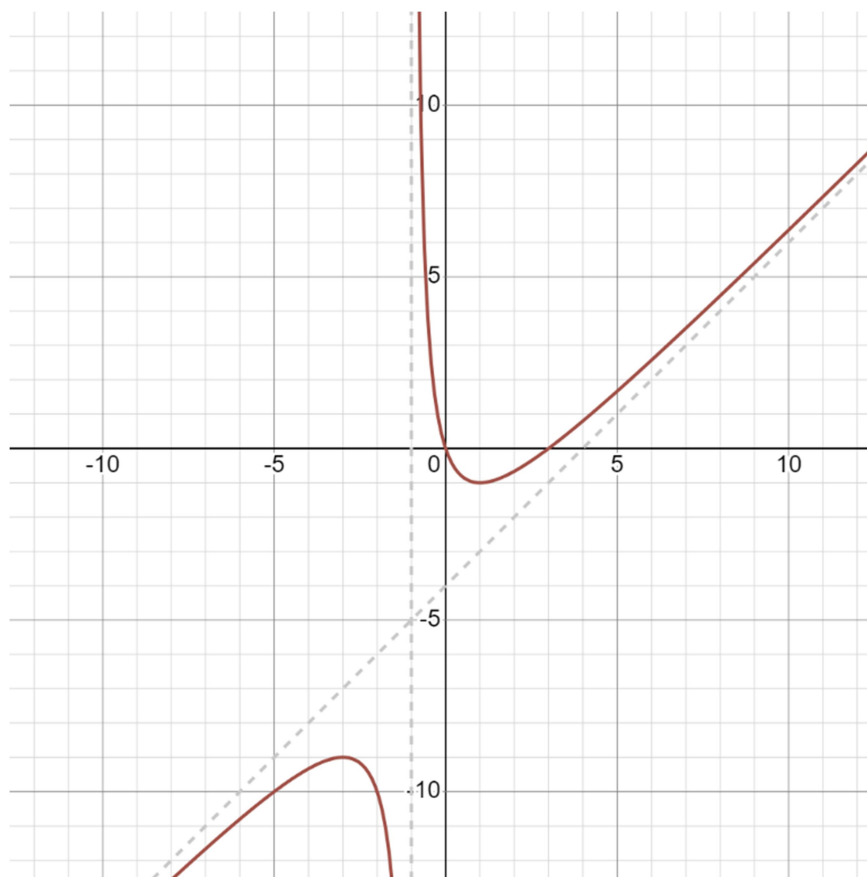
$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$$

Eine schiefe Asymptote wird mittels Polynomdivision berechnet.

$$\begin{array}{r} (x^2 - 3x) : (x + 1) = x - 4 + \frac{4}{x + 1} \\ -(x^2 + x) \phantom{00} \\ \hline -4x \phantom{00} \\ -(-4x - 4) \phantom{00} \\ \hline 4 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1} \Rightarrow \text{Asymptote: } y = x - 4$$

Der Restterm kann ignoriert werden, da dieser für  $|x| \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt.



- **Kurvenförmige Asymptoten**

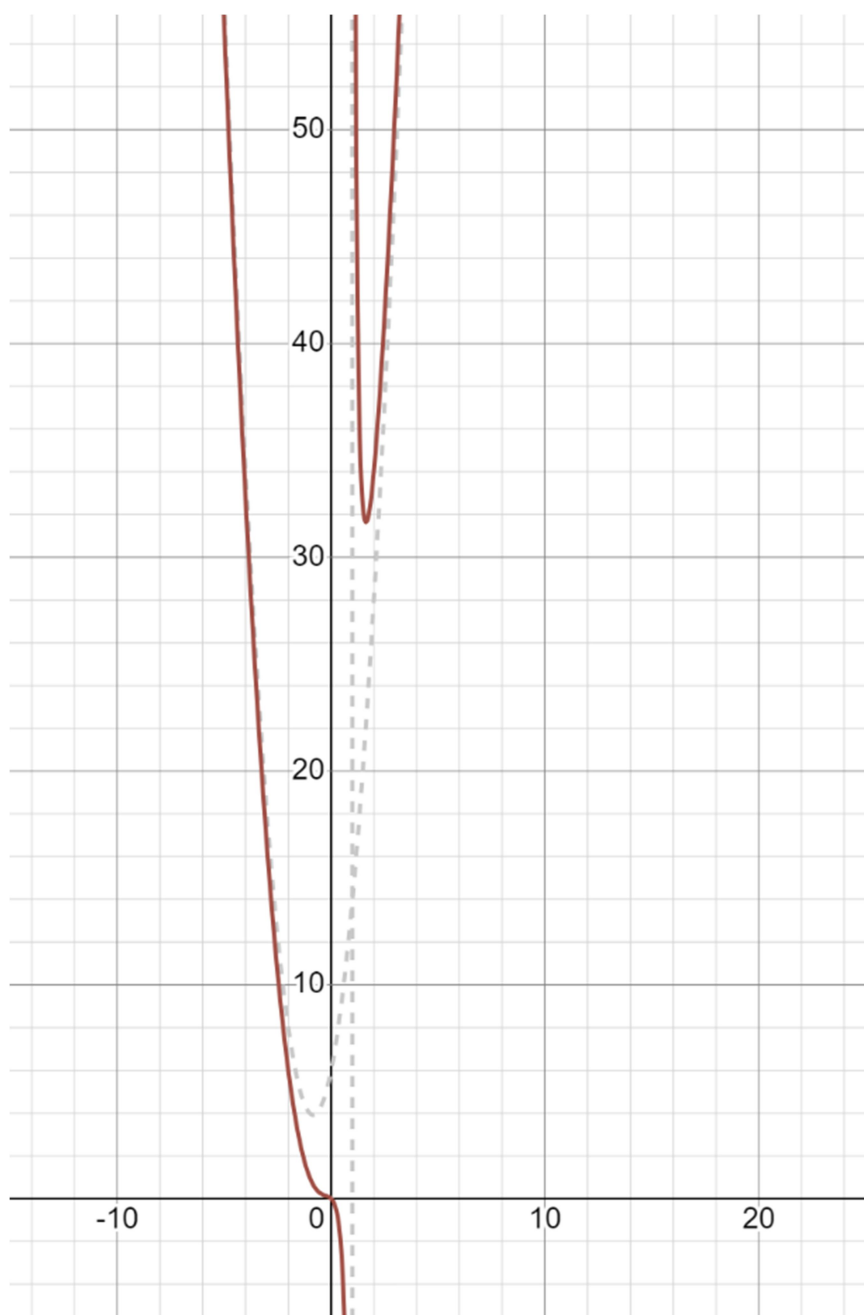
Kurvenförmige Asymptoten erfordern einen um mehr als 1 höheren Zähler- als Nennergrad.

$$f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 + x}{x - 1}$$

Eine kurvenförmige Asymptote wird mittels Polynomdivision berechnet.

$$\begin{array}{r} (3x^3 + 2x^2 + x) : (x - 1) = 3x^2 + 5x + 6 + \frac{6}{x - 1} \\ \underline{-(3x^3 - 3x^2)} \phantom{+ x} \\ 5x^2 + x \\ \underline{-(5x^2 - 5x)} \phantom{+ 6} \\ 6x \\ \underline{-(6x - 6)} \\ 6 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 + x}{x - 1} \Rightarrow \text{Asymptote: } y = 3x^2 + 5x + 6$$



- **Asymptoten von Funktionen bestimmen**

Beispiel 1:

$$f(x) = \frac{2x}{x+3}$$

Senkrechte Asymptote:  $x = -3$

$$(2x):(x+3) = 2 - \frac{6}{x+3}$$

Waagerechte Asymptote:  $y = 2$

Beispiel 2:

$$f(x) = \frac{2}{3x+1}$$

Senkrechte Asymptote:  $x = -\frac{1}{3}$

Steht im Zähler keine Variable  $x$ , gilt für die waagerechte Asymptote immer  $y = 0$ .

Beispiel 3:

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{3}{3}$$

$$f(x) = \frac{3x-4}{2x}$$

Senkrechte Asymptote:  $x = 0$

$$(3x-4):(2x) = 1,5 - \frac{4}{2x}$$

Waagerechte Asymptote:  $y = 1,5$

Beispiel 4:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

Senkrechte Asymptote:  $x = -1$

$$(x^2):(x+1) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

Schiefe Asymptote:  $y = x - 1$

Beispiel 5:

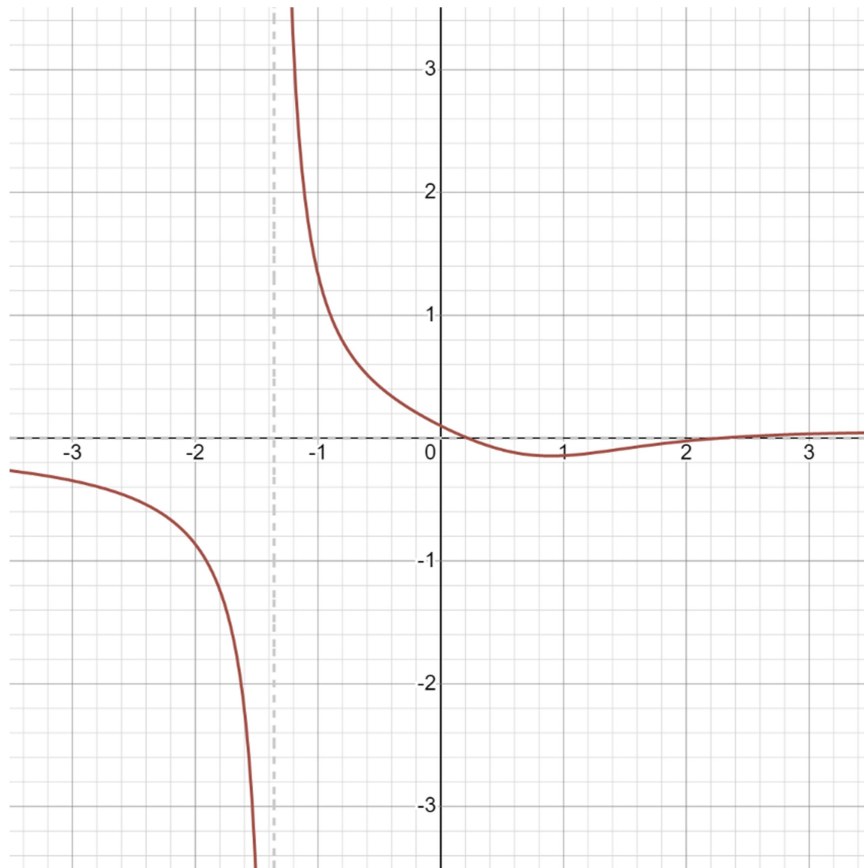
$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{4x^3 + 10}$$

Senkrechte Asymptote:  $x = \sqrt[3]{-2,5} = -1,35720881$

$x = \sqrt[3]{-2,5}$  ist keine Nullstelle des Zählers, mithin liegt keine hebbare Lücke vor.

Waagerechte Asymptote:

$$y = 0$$



Beispiel 6:

$$f(x) = \frac{2x^4 - 5x + 1}{2x^2 - 3}$$

Senkrechte Asymptoten:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$x_2 = +\sqrt{\frac{3}{2}}$$

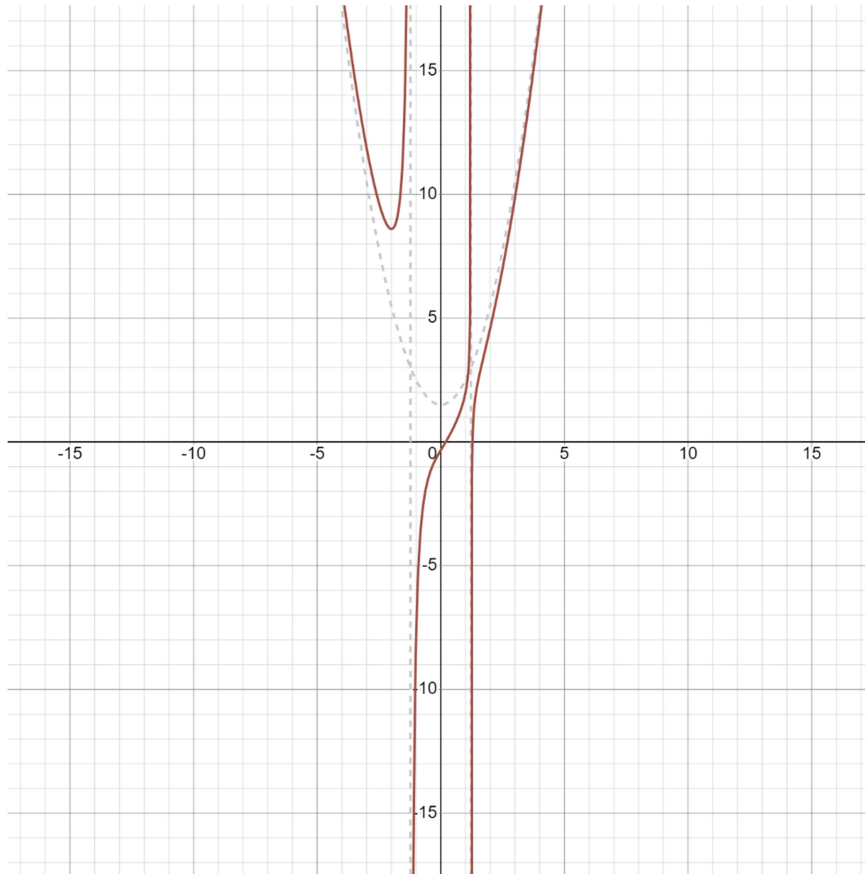
Kurvenförmige Asymptote:

$$(2x^4 - 5x + 1) : (2x^2 - 3) = x^2 + 1,5 + \frac{-5x + 3}{2x^2 - 3}$$

$$\frac{-(2x^4 - 3x^2)}{3x^2 - 5x}$$

$$\frac{-(3x^2 - 3)}{-5x + 3}$$

$$y = x^2 + 1,5$$



- **Hebbare Lücken vs. Polstellen**

$$f(x) = \frac{-(x - 3)}{x^2 - 9}$$

Nullstellen Nenner:

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = +3$$

Um eine Aussage darüber treffen zu können, ob  $x_1$  und  $x_2$  tatsächlich senkrechte Asymptoten sind, muss man  $x_1$  und  $x_2$  in den Zähler einsetzen; dabei darf der Zähler nicht 0 werden. Andernfalls ist die Funktion zunächst zu vereinfachen.

$x_2 = +3$  ist auch eine Nullstelle des Zählers. Insoweit ist die Funktion zunächst zu vereinfachen.

$$f(x) = \frac{-(x-3)}{x^2-9} = \frac{-(x-3)}{(x+3) \cdot (x-3)} = -\frac{1}{x+3}$$

Bei  $x_1 = -3$  besteht eine senkrechte Asymptote.  
Für  $x_2 = +3$  besteht somit eine hebbare Lücke.

Da der Zählergrad geringer als der Nennergrad, ergibt sich als weitere Asymptote die Gerade  $y = 0$ . Die beiden Asymptoten schneiden sich im Symmetriepunkt bei  $(-3;0)$ .

Da man ohne Visualisierung den genauen Kurvenverlauf nicht kennt, muss das Grenzverhalten an den Polstellen untersucht werden.

Nähert man sich der Polstelle von rechts, läuft  $y$  gegen  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -3^r} -\frac{1}{x+3} = -\infty$$

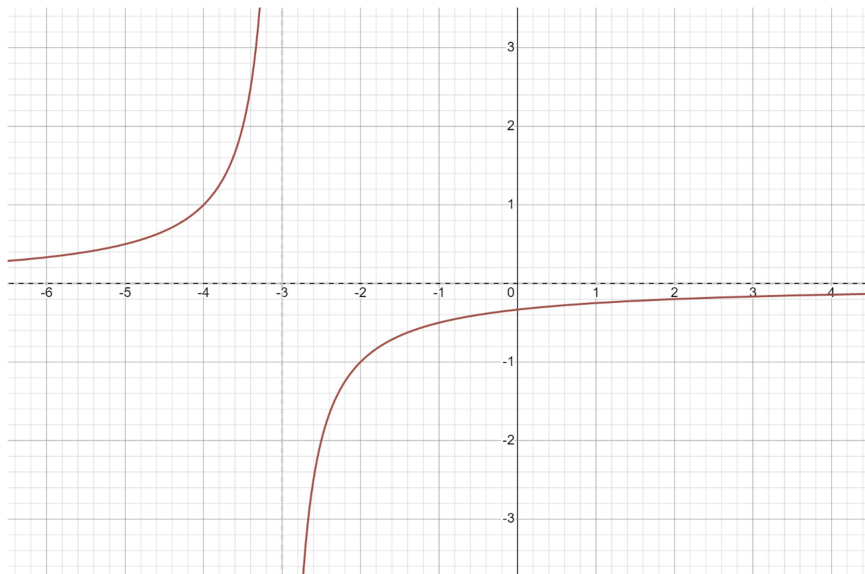
Nähert man sich der Polstelle von links, läuft  $y$  gegen  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -3^l} -\frac{1}{x+3} = +\infty$$

An Asymptoten läuft die Funktion nur gegen  $-\infty$  oder  $+\infty$ .

Setzt man bei der von rechts laufenden Annäherung eine Zahl in die Funktionsgleichung ein, die geringfügig größer ist als  $-3$ , erhält man einen negativen Funktionswert und weiß damit, dass dieser Funktionsteil an der Polstelle  $-3$  gegen minus unendlich läuft.

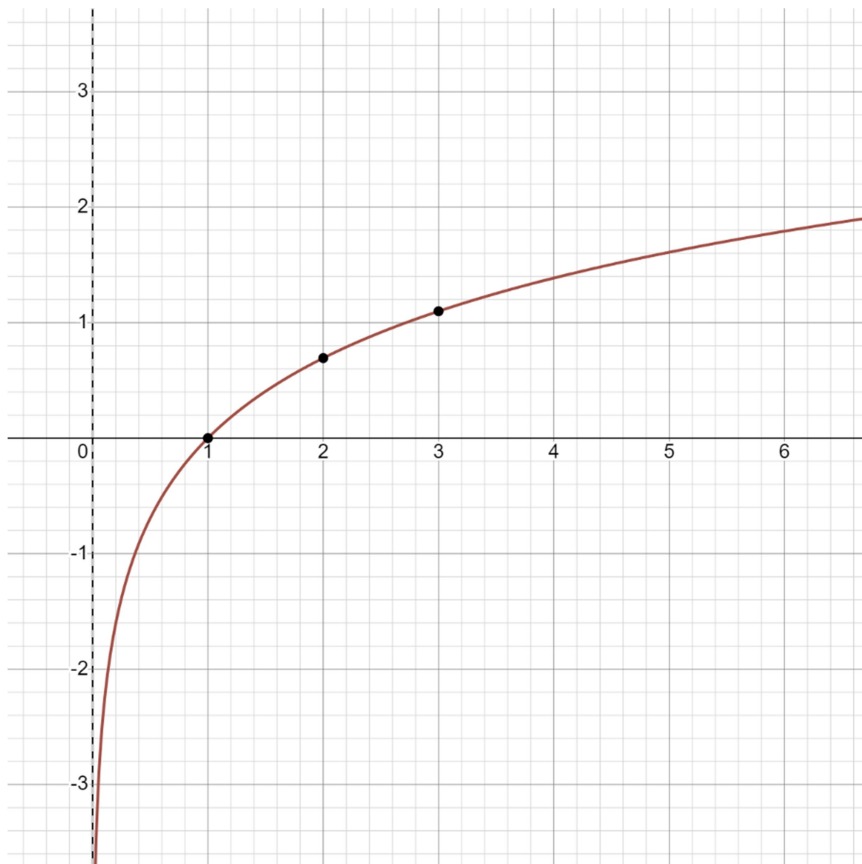
Setzt man bei der von links laufenden Annäherung eine Zahl in die Funktionsgleichung ein, die geringfügig kleiner ist als  $-3$ , erhält man einen positiven Funktionswert und weiß damit, dass dieser Funktionsteil an der Polstelle  $-3$  gegen plus unendlich läuft.



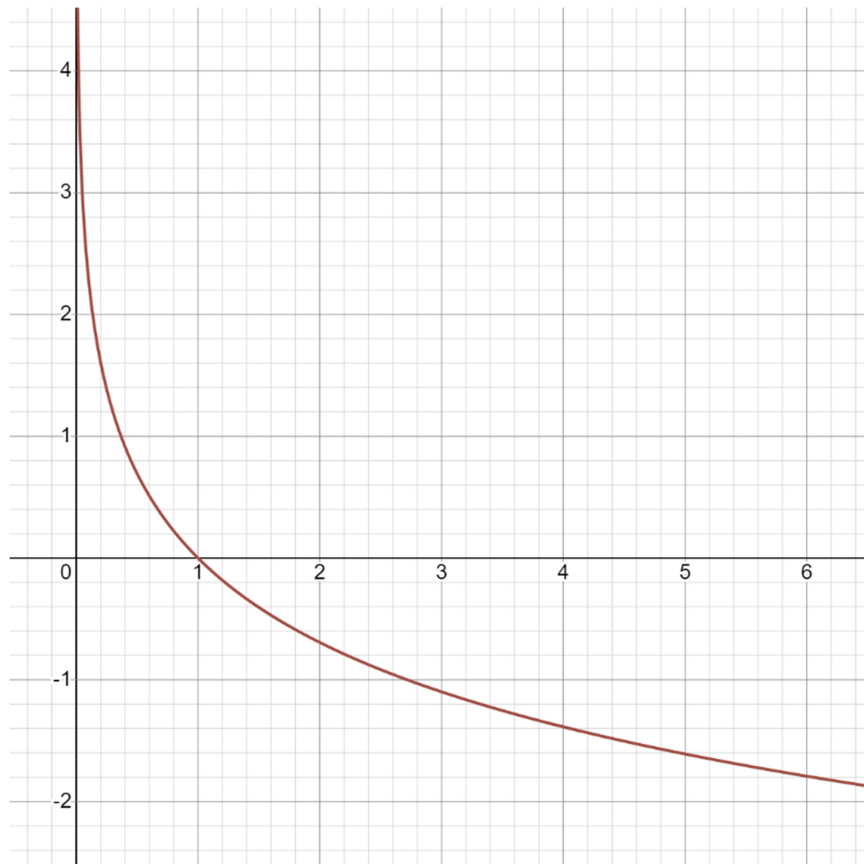
- Asymptoten bei Logarithmusfunktionen

Logarithmusfunktionen haben zumeist eine oder mehrere senkrechte Asymptoten, wobei die Funktion entweder nur links oder nur rechts der jeweiligen Asymptote existiert. Es gibt auch Logarithmusfunktionen mit waagerechten bzw. schiefen Asymptoten.

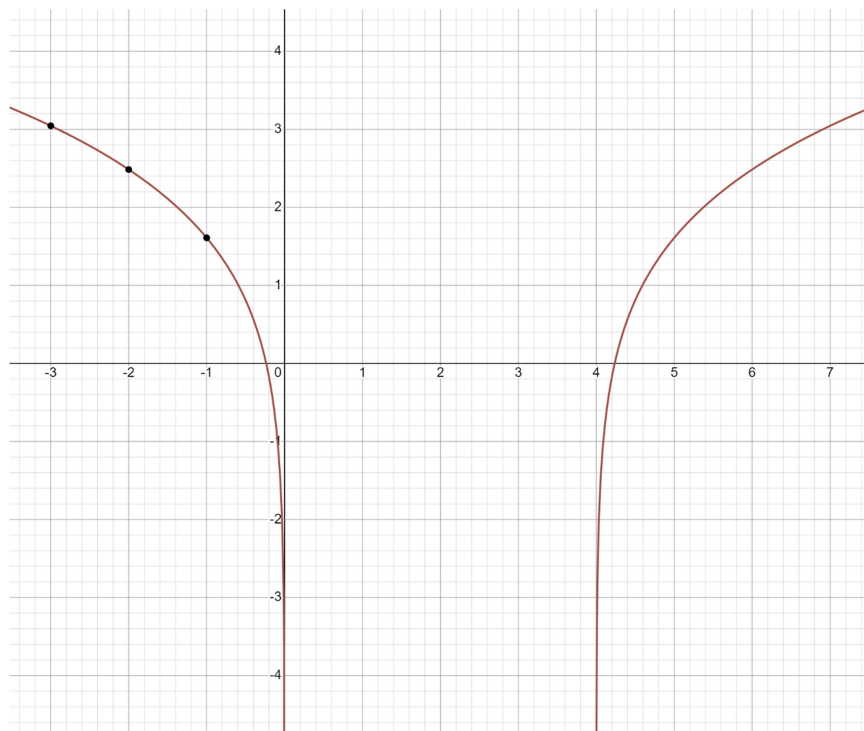
$$f(x) = \ln(x)$$



$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$



$$f(x) = \ln(x^2 - 4x)$$



## 24. Differentialrechnung – Grenzwertrechnung –

- Der Limes (lim) oder Grenzwert einer Funktion an einer bestimmten Stelle  $x$  ist der Wert  $y$ , dem sich die Funktion in der Umgebung der betrachteten Stelle annähert. Ein solcher Grenzwert existiert jedoch nicht in allen Fällen. Existiert der Grenzwert, so konvergiert die Funktion, andernfalls divergiert sie.
- Ein Grenzwert beschreibt den Wert, dem sich eine Funktion, Folge oder Reihe annähert, ohne ihn unbedingt zu erreichen. Grenzwerte sind wichtig, um das Verhalten von mathematischen Ausdrücken an bestimmten Stellen oder im Unendlichen zu analysieren, beispielsweise bei Definitionslücken oder zur Untersuchung von Konvergenz und Divergenz.
- Ein Grenzwert einer Funktion  $f(x)$  an einer Stelle  $c$  existiert, wenn sich der Funktionswert  $f(x)$  einem einzigen, endlichen Wert annähert, wobei sich  $x$  der Stelle  $c$  von beiden Seiten nähert. Ein Grenzwert einer Funktion an einer bestimmten Stelle existiert nicht, wenn die Grenzwerte von links und rechts nicht übereinstimmen.
- Ein Grenzwert einer Funktion  $f(x)$  existiert in folgenden Fällen nicht:
  - (i) Der Funktionswert  $y$  strebt gegen plus oder minus Unendlich. Er hat dann keinen endlichen Wert. Das Streben gegen plus oder minus Unendlich erfolgt entlang einer senkrechten, schiefen oder kurvenförmigen Asymptote. Der Grenzwert an diesen Asymptoten existiert nicht im Sinne einer endlichen Zahl, sondern als Unendlichkeitsgrenzwert. An diesen Asymptoten existiert mithin ein spezieller Grenzwert, weil die jeweilige Funktion ins Unendliche geht und nicht gegen einen einzigen Wert konvergiert.

Entlang einer waagerechten Asymptote strebt der Funktionswert für  $x \rightarrow \pm\infty$  gegen den  $y$ -Wert, der die waagerechte Asymptote abbildet.

Eine Asymptote ist eine Gerade oder eine Kurve, an die sich ein Funktionsgraph im Unendlichen (bezogen auf  $x$ - und/oder  $y$ -Werte) immer weiter annähert.

Der Grenzwert an einer Asymptote beschreibt das Verhalten einer Funktion, wenn sich  $x$  einem bestimmten Wert nähert (senkrechte Asymptote) oder wenn  $x$  gegen  $\pm\infty$  läuft (horizontale, schiefe bzw. kurvenförmige Asymptote).

An einer senkrechten Asymptote (Polstelle) verhält sich die Funktion so, dass die  $y$ -Werte extrem groß (positiv) oder extrem klein (negativ) werden, wenn sich  $x$  der Asymptote nähert.

Eine Hyperbel hat immer sowohl eine waagrechte als auch eine senkrechte Asymptote. Unter einer Hyperbel versteht man den Graph einer gebrochenrationalen Funktion des Typs  $f(x) = a * x^{\frac{m}{n}}$  mit  $\frac{m}{n} < 0$ . Beispiele für Hyperbeln:  $\frac{1}{x}; \frac{3}{x}; \frac{1}{x^2}; \frac{3}{x^3}; \frac{4}{x^4}; \dots$

(ii) Der links- und rechtsseitige Grenzwert stimmen nicht überein, d.h. die Annäherung von links und rechts führt zu unterschiedlichen Grenzwerten, was beispielsweise bei Sprungstellen der Fall ist. Sprungstellen kommen regelmäßig bei abschnittsweise definierten Funktionen vor.

(iii) Die Funktion oszilliert, d.h. die Funktion kehrt mit fortlaufenden x-Werten regelmäßig zu früheren y-Werten zurück. Beispiel:  $f(x) = \sin(x)$

- $y = f(x) = x$   
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$y = f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

- **Grenzwertregeln**

(i) Summen und Differenzen

$$\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$$

$$(\pm\infty) + x = \pm\infty$$

$$(\pm\infty) - x = \pm\infty$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$-(-\infty) = +\infty$$

(ii) Konstante Multiplikatoren

Ein konstanter Multiplikator kann aus dem Grenzwert ausgeklammert werden.

$$\lim c * f(x) = c * \lim f(x)$$

(iii) Produkte

$$\lim(f(x) * g(x)) = \lim f(x) * \lim g(x)$$

$$x * (+\infty) = +\infty \text{ für } x > 0$$

$$x * (+\infty) = -\infty \text{ für } x < 0$$

$$x * (-\infty) = -\infty \text{ für } x > 0$$

$$x * (-\infty) = +\infty \text{ für } x < 0$$

$$(+\infty) * (+\infty) = (+\infty)$$

$$(+\infty) * (-\infty) = (-\infty)$$

$$(-\infty) * (-\infty) = (+\infty)$$

(iv) Quotienten

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$

$$\frac{x}{(+\infty)} = \frac{x}{(-\infty)} = 0$$

$$\frac{0}{(+\infty)} = \frac{0}{(-\infty)} = 0$$

$$\frac{x}{0} = +\infty \text{ für } x > 0$$

$$\frac{x}{0} = -\infty \text{ für } x < 0$$

$$\frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty$$

(v) Potenzen

$$\lim f(x)^n = (\lim f(x))^n$$

$$x^{+\infty} = +\infty \text{ für } x > 1$$

$$x^{+\infty} = 0 \text{ für } 0 \leq x < 1$$

$$x^{-\infty} = 0 \text{ für } x > 1$$

$$x^{-\infty} = +\infty \text{ für } 0 \leq x < 1$$

$$e^{\infty} = +\infty$$

$$e^{-\infty} = 0$$

$$(+\infty)^x = +\infty \text{ für } x > 0$$

$$(+\infty)^x = 0 \text{ für } x < 0$$

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$$

$$(+\infty)^{-\infty} = 0$$

(vi) Verkettete Funktionen

Wenn

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$$

und

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b)$$

dann

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(b)$$

(vii) Exponentialfunktionen

Aufbauend auf (vi) gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} n^{f(x)} = n^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$$n > 0, n \neq 1$$

- Logarithmusfunktionen sind für Basen  $0 < a < 1$  streng monoton fallend und für Basen  $a > 1$  streng monoton steigend. Für die Grenzwerte von Logarithmusfunktionen gilt:

$$0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a f(x) = -\infty$$

$$a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Bei Funktionen, die sich aus logarithmischen und nicht-logarithmischen Termen zusammensetzen, wird der Limes eines logarithmischen Terms durch den Limes eines nicht-logarithmischen Term dominiert. Der Limes der gesamten Funktion richtet sich dann nach dem Limes des nicht-logarithmischen Terms.

- Grenzwertberechnung bei ganzrationalen Funktionen im Unendlichen

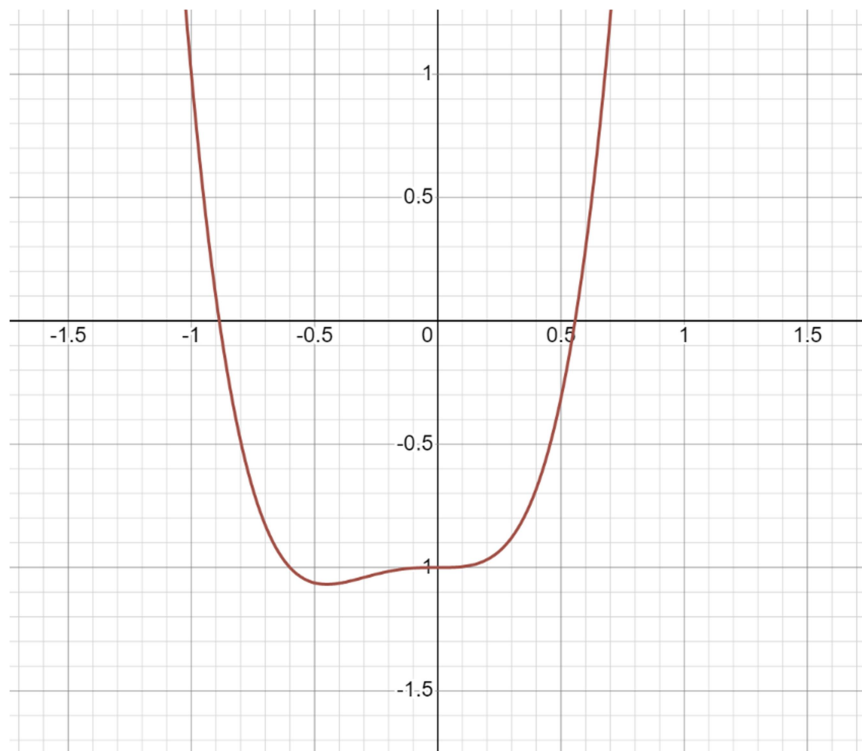
Es sind 4 Fälle zu unterscheiden:

- (i) Größter Exponent ist gerade Zahl, vorstehender Koeffizient ist positiv

Es liegt eine nach oben geöffnete Parabel vor.

$$f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

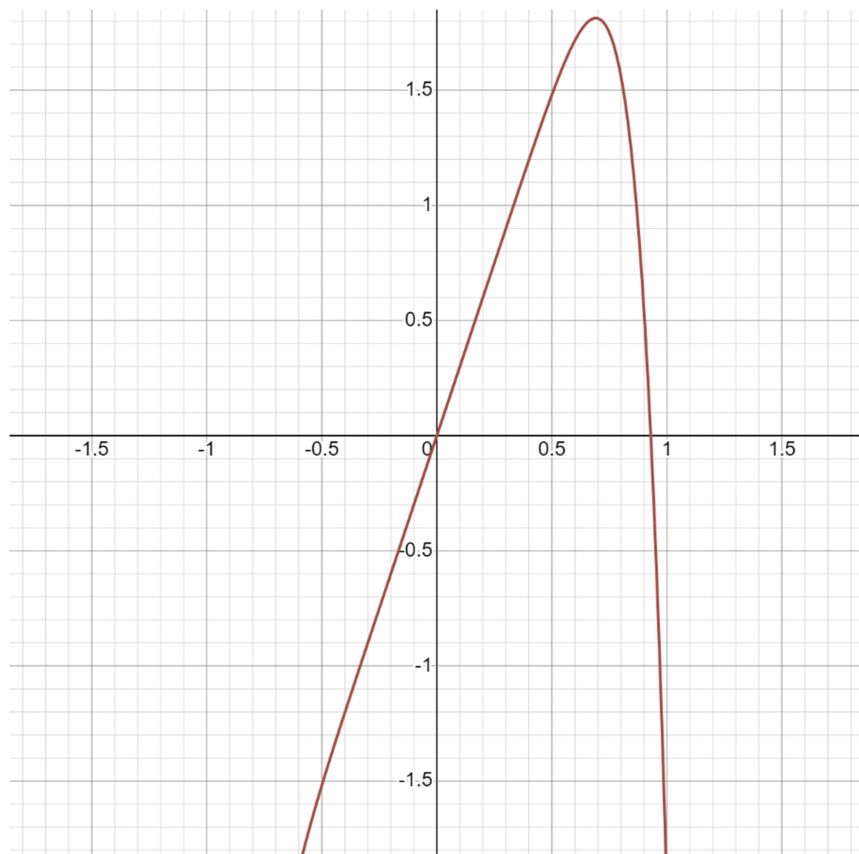


(ii) Größter Exponent ist gerade Zahl, vorstehender Koeffizient ist negativ

Es liegt eine nach unten geöffnete Parabel vor.

$$f(x) = -5x^8 + 3x$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$$

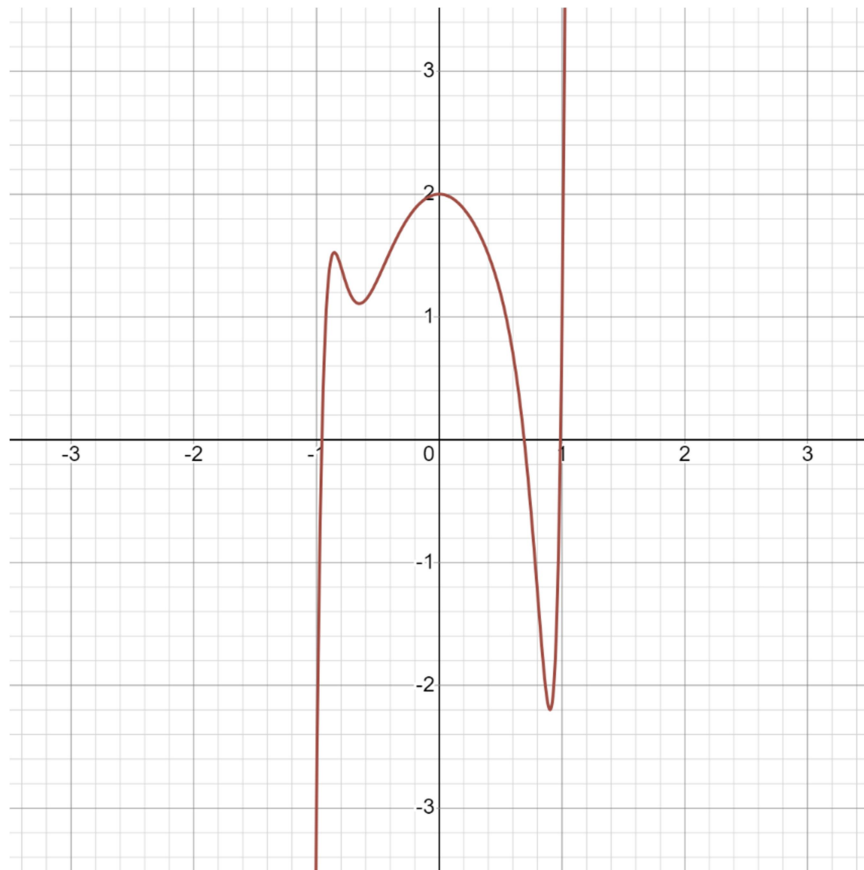


(iii) Größter Exponent ist ungerade Zahl, vorstehender Koeffizient ist positiv

Es liegt eine tendenziell von links unten nach rechts oben verlaufende Funktion vor.

$$f(x) = -8x^7 - 3x^2 + 10x^{15} + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

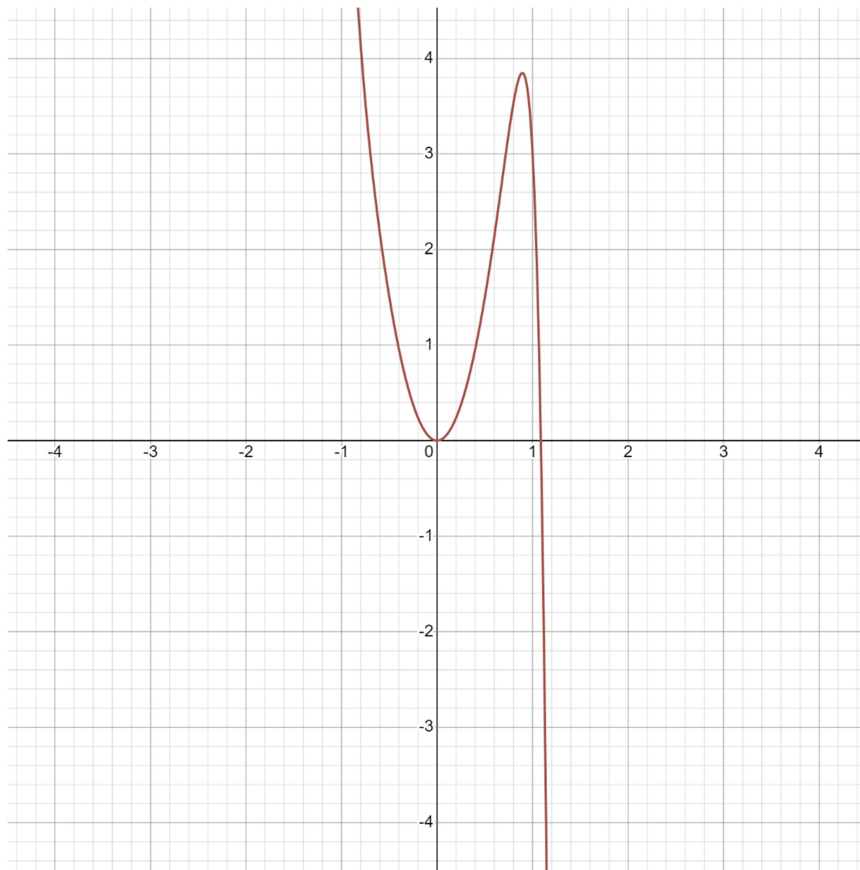


(iv) Größter Exponent ist ungerade Zahl, vorstehender Koeffizient ist negativ

Es liegt eine tendenziell von links oben nach rechts unten verlaufende Funktion vor.

$$f(x) = -x^9 + 6x^2 - 2x^{11}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty$$



- Grenzwertberechnung bei gebrochenrationalen Funktionen im Unendlichen

Es sind 3 Fälle zu unterscheiden:

- (i) Größter Exponent steht im Nenner

$$f(x) = \frac{5x^3 + 7x}{2x^5 + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

- (ii) Größter Exponent im Zähler und Nenner sind gleich

Der Grenzwert ergibt sich als Bruch der Zahlen vor den größten Exponenten.

$$f(x) = \frac{3x^7 + 2x + 1}{5x^7 + 3x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{3}{5}$$

- (iii) Größter Exponent steht im Zähler

Termbestandteile mit den jeweils größten Exponenten im Zähler und Nenner sind zu isolieren und erforderlichenfalls zu vereinfachen.

$$f(x) = \frac{3x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 5}{4x^3 - 3x + 10}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{4} = -\infty$$

- Unmittelbar und nicht unmittelbar feststellbare Grenzwerte

Grenzwert unmittelbar feststellbar:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(7 - \frac{1}{x}\right) * \left(3 + \frac{2}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (7 - 0) * (3 + 0) = 21$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - \frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-4} = -1$$

Grenzwert nicht unmittelbar feststellbar:

Funktionen sind soweit zu vereinfachen, dass der Grenzwert problemlos festgestellt werden kann, z.B. durch Polynomdivision, Kürzung etc.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 - 8x}{2 + x} = \lim_{x \rightarrow -2} 2x^2 - 4x = 16$$

$$(2x^3 - 8x) : (x + 2) = 2x^2 - 4x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{2} - \frac{11}{2x^2 + 4} = \frac{3}{2}$$

$$(3x^2 - 5) : (2x^2 + 4) = \frac{3}{2} - \frac{11}{2x^2 + 4}$$

- **Regel von de L'Hospital**

Die Grenzwerte einer Funktion nehmen eine unbestimmte Form an, wenn sie nach dem Einsetzen der Grenzwerte in Ausdrücke folgender Art übergehen:

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$0 * \pm\infty$$

$$\infty - \infty$$

$$0^0$$

$$1^\infty$$

$$\infty^0$$

In folgenden Fällen eines nicht eindeutigen Limes, kann für die Zähler- und Nennerfunktion jeweils die erste Ableitung gebildet werden. Das Ergebnis ist sodann auf den Limes hin zu prüfen. Bleibt der Limes weiterhin unklar, kann bei Fortbestehen dieser Fallkonstellationen erneut abgeleitet werden:

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$0 * \pm\infty$$

Beispiel 1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x}$$

Zähler und Nenner laufen gegen unendlich, die Regel von de L'Hospital ist anwendbar.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Beispiel 2:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln(x)}$$

Zähler und Nenner laufen gegen 0, die Regel von de L'Hospital ist anwendbar.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{\frac{1}{x}} = \frac{e}{1} = e$$

Beispiel 3:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x * \ln(x)$$

Faktor  $x$  läuft gegen  $0$ , Faktor  $\ln(x)$  läuft gegen  $-\infty$ . Zur Anwendung der Regel von de L'Hospital muss nun ein Bruch gebildet werden

$$\lim_{x \rightarrow 0} x * \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

Zähler läuft gegen  $-\infty$ , Nenner läuft gegen  $+\infty$ , die Regel von de L'Hospital ist anwendbar.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x * \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$$

- **Beispiel 1:**

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\tan(\pi * x)}{2x - 1} + \frac{2}{\pi * (2x - 1)^2}$$

Die Tangensfunktion läuft bei  $\frac{\pi}{2}$  von links gegen  $+\infty$  und von rechts gegen  $-\infty$ , d.h. der Grenzwert existiert nicht an der Stelle  $\frac{\pi}{2}$ . Der Tangens wäre hier zu substituieren:  $\tan = \frac{\sin}{\cos}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{\sin(\pi * x)}{\cos(\pi * x)}}{2x - 1} + \frac{2}{\pi * (2x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi * x)}{(2x - 1) * \cos(\pi * x)} + \frac{2}{\pi * (2x - 1)^2}$$

Nenner vereinheitlichen, dabei beachten:

$$\frac{a}{b * c} \pm \frac{d}{e * b^2} = \frac{a * b * e \pm c * d}{b^2 * c * e}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi * x) * \pi * (2x - 1) + 2 * (\cos(\pi * x))}{(2x - 1)^2 * \pi * \cos(\pi * x)}$$

Anschließend ist eine Grenzwertbetrachtung vorzunehmen:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi * x) * \pi * (2x - 1) + 2 * (\cos(\pi * x))}{(2x - 1)^2 * \pi * \cos(\pi * x)} = \frac{1 * \pi * 0 + 2 * 0}{0 * \pi * 0} = \frac{0}{0}$$

Zähler und Nenner laufen gegen  $0$ , die Regel von de L'Hospital ist anwendbar. Dabei Produktregel sowie äußere und innere Ableitungen berücksichtigen.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi * x) * \pi * (2x - 1) + 2 * (\cos(\pi * x))}{(2x - 1)^2 * \pi * \cos(\pi * x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi * x) * \pi * \pi * (2x - 1) + \sin(\pi * x) * \pi * 2 + 2 * (-\sin(\pi * x)) * \pi}{\pi * 2 * (2x - 1) * 2 * \cos(\pi * x) + (2x - 1)^2 * \pi * (-\sin(\pi * x)) * \pi} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi * x) * \pi^2 * (2x - 1) + 2 * \pi * \sin(\pi * x) + 2 * \pi * (-\sin(\pi * x))}{\pi * 2 * (2x - 1) * 2 * \cos(\pi * x) + (2x - 1)^2 * \pi^2 * (-\sin(\pi * x))} =$$

Im Nenner heben sich  $+ 2 * \pi * \sin(\pi * x) + 2 * \pi * (-\sin(\pi * x))$  auf. Nach Maßgabe der Formel  $\frac{a^n * b \pm a^n * c}{a^n * d \pm a^{n+1} * e} = \frac{a^{n-1} * b + a^{n-1} * c}{a^{n-1} * d \pm a^n * e}$  können im Zähler und Nenner  $\pi$  sowie  $(2x - 1)$  gekürzt werden.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi * x) * \pi}{2 * 2 * \cos(\pi * x) + (2x - 1) * \pi * (-\sin(\pi * x))} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi * x) * \pi}{4 * \cos(\pi * x) + (2x - 1) * \pi * (-\sin(\pi * x))} =$$

Anschließend ist erneut eine Grenzwertbetrachtung vorzunehmen:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{0 * \pi}{4 * 0 + 0 * \pi * -1} = \frac{0}{0}$$

Zähler und Nenner laufen gegen 0, die Regel von de L'Hospital ist anwendbar.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi * x) * \pi}{4 * \cos(\pi * x) + (2x - 1) * \pi * (-\sin(\pi * x))} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\pi * (-\sin(\pi * x)) * \pi}{4 * (-\sin(\pi * x)) * \pi + \pi * 2 * (-\sin(\pi * x)) + (2x - 1) * \pi * (-\cos(\pi * x)) * \pi} =$$

Im Zähler und Nenner  $\pi$  kürzen

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\pi * (-\sin(\pi * x))}{4 * (-\sin(\pi * x)) + 2 * (-\sin(\pi * x)) + (2x - 1) * \pi * (-\cos(\pi * x))} =$$

Anschließend ist erneut eine Grenzwertbetrachtung vorzunehmen:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\pi * -1}{4 * -1 + 2 * -1 + 0 * \pi * -0} = \frac{-\pi}{-6} = \frac{\pi}{6}$$

- **Beispiel 2:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x * \ln \left( \frac{x - 1}{x + 1} \right) \right)$$

Für den Grenzwert des inneren Klammersausdrucks  $\frac{x-1}{x+1}$  ergibt sich  $\frac{+\infty}{+\infty}$ ; Zähler und Nenner laufen gegen unendlich, die Regel von de L'Hospital ist anwendbar.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x * \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right) \right) = \infty * 0$$

Faktor x läuft gegen  $\infty$ , Faktor  $\ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right)$  läuft gegen 0. Zur Anwendung der Regel von de L'Hospital muss nun ein Bruch gebildet werden; in Fällen wie dem vorliegenden kommt der komplexere Faktor üblicherweise in den Zähler.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x * \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right)}{\frac{1}{x}}$$

Zähler läuft gegen 0, Nenner läuft gegen 0, die Regel von de L'Hospital ist anwendbar.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right)}{\frac{1}{x}}$$

$$f_1(x) = \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right)$$

$$g(x) = \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right)$$

$$g'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$h(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$h'(x) = \frac{1 * (x+1) - (x-1) * 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$f_1'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} * \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x-1) * (x+1)}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x}$$

$$f_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{(x-1) * (x+1)}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{2 * x^2}{x^2 - 1}$$

Anschließend ist eine Grenzwertbetrachtung vorzunehmen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{2 * x^2}{x^2 - 1} = -\frac{\infty}{\infty}$$

Zähler und Nenner laufen gegen unendlich, die Regel von de L'Hospital ist anwendbar.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{4 * x}{2x} = -2$$

- **Beispiel 3:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x$$

Für den Grenzwert des inneren Klammerausdrucks  $\frac{1}{x}$  ergibt sich  $+\infty$  (Hyperbel nähert sich von rechts kommend  $+\infty$ ). Der Exponent läuft gegen 0. Für  $+\infty^0$  ist ein Grenzwert nicht unmittelbar feststellbar: Die Funktion muss umgeschrieben werden.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^x\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x * \ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x * (\ln(1) - \ln(x))} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x * (0 - \ln(x))}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x * \ln(x)}$$

Anschließend ist eine Grenzwertbetrachtung vorzunehmen. Da die Basis e für die Grenzwertbetrachtung irrelevant ist, kann die Grenzwertbetrachtung nur auf den Exponent bezogen werden:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} -x * \ln(x)}$$

Faktor x läuft gegen 0, Faktor  $\ln(x)$  läuft gegen  $-\infty$ . Zur Anwendung der Regel von de L'Hospital muss nun ein Bruch gebildet werden

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{-\frac{1}{x}}}$$

Zähler läuft gegen 0, Nenner läuft gegen 0, die Regel von de L'Hospital ist anwendbar.

$$e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{-\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}}$$

Anschließend ist eine Grenzwertbetrachtung vorzunehmen:

$$e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = e^0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x = 1$$

Hinweis:

Lösbar auch über folgenden Weg:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1^x}{x^x}$$

Allerdings: Während der Grenzwert für  $1^x$  gegen 1 läuft, reicht es nicht zu erkennen, dass der Grenzwert für  $x^x$  gegen 1 läuft.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1^x}{x^x} = \frac{1}{e^{x \cdot \ln(x)}} = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$$

- **Beispiel 4:**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 12x - 16}{x^4 - 2x^3 - 8x + 16} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} = \frac{x^3 - 12x - 16}{x^4 - 2x^3 - 8x + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 12}{4x^3 - 6x^2 - 8} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 12}{4x^3 - 6x^2 - 8} = \frac{6x}{12x^2 - 12x} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

- **Beispiel 5:**

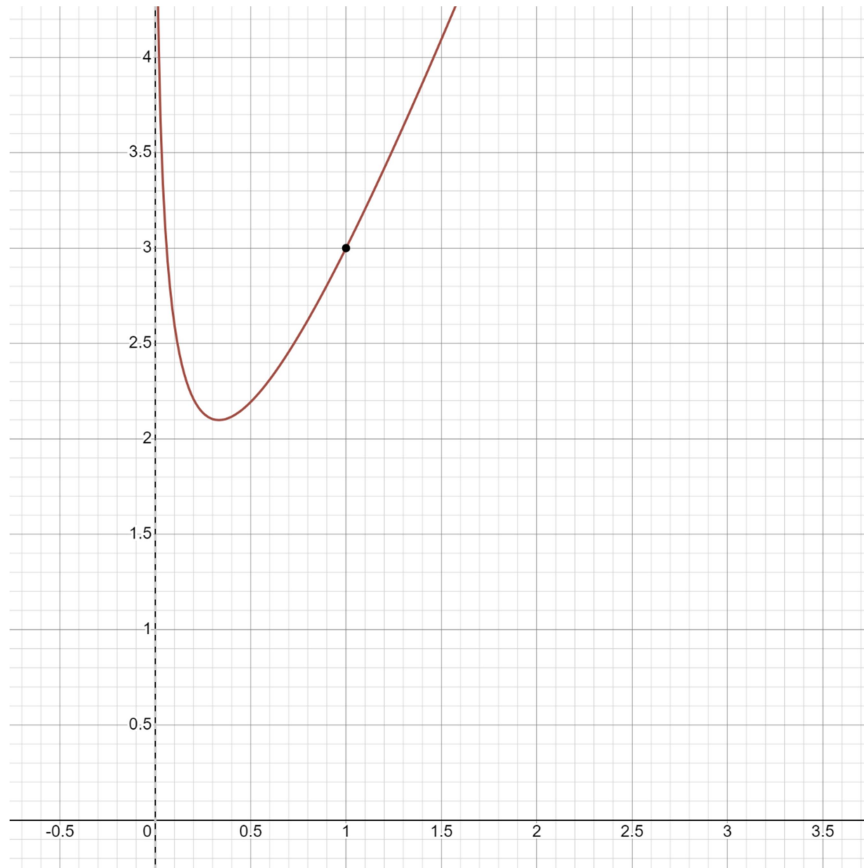
Bestimme das Verhalten der Funktion  $f(x) = 3x - \ln(x)$  am Rand der Definitionsmenge.

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x - \ln(x) = 0 - -\infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - \ln(x) = +\infty - +\infty = +\infty$$

$+\infty - +\infty$  ist ein Widerspruch. Der Limes eines logarithmischen Terms wird jedoch durch den Limes einen nicht-logarithmischen Term dominiert.



- **Beispiel 6:**

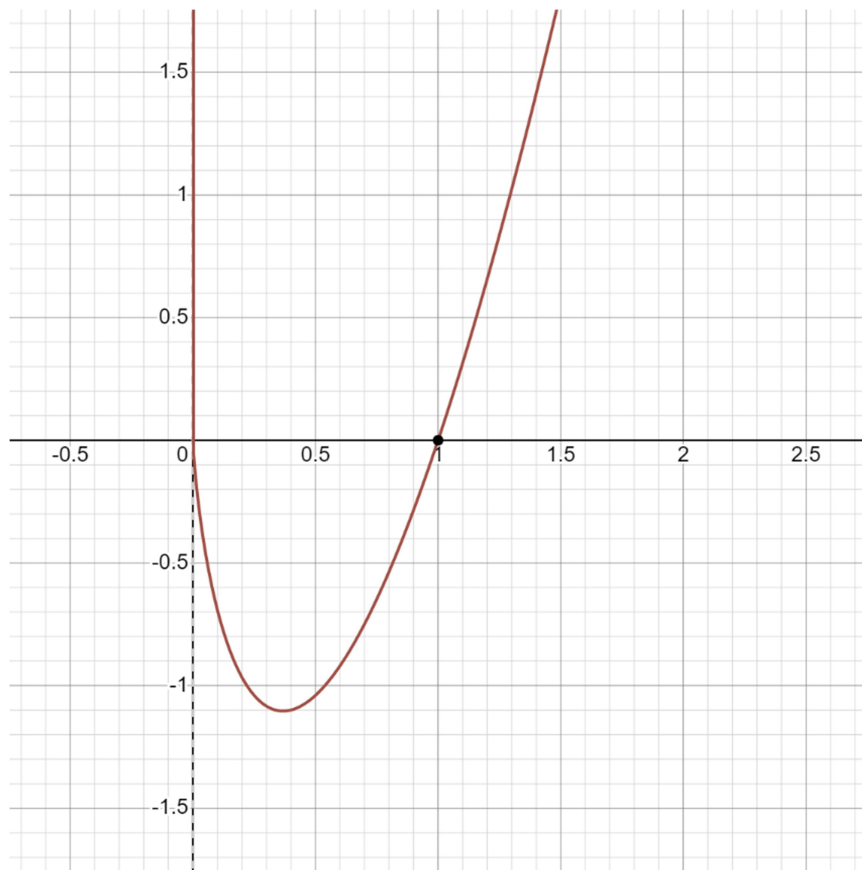
Bestimme das Verhalten der Funktion  $f(x) = 3x * \ln(x)$  am Rand der Definitionsmenge.

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x * \ln(x) = 0 * \infty = 0$$

$0 * \infty$  ist ein Widerspruch. Der Limes eines logarithmischen Terms wird jedoch durch den Limes einen nicht-logarithmischen Term dominiert.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x * \ln(x) = +\infty * +\infty = +\infty$$



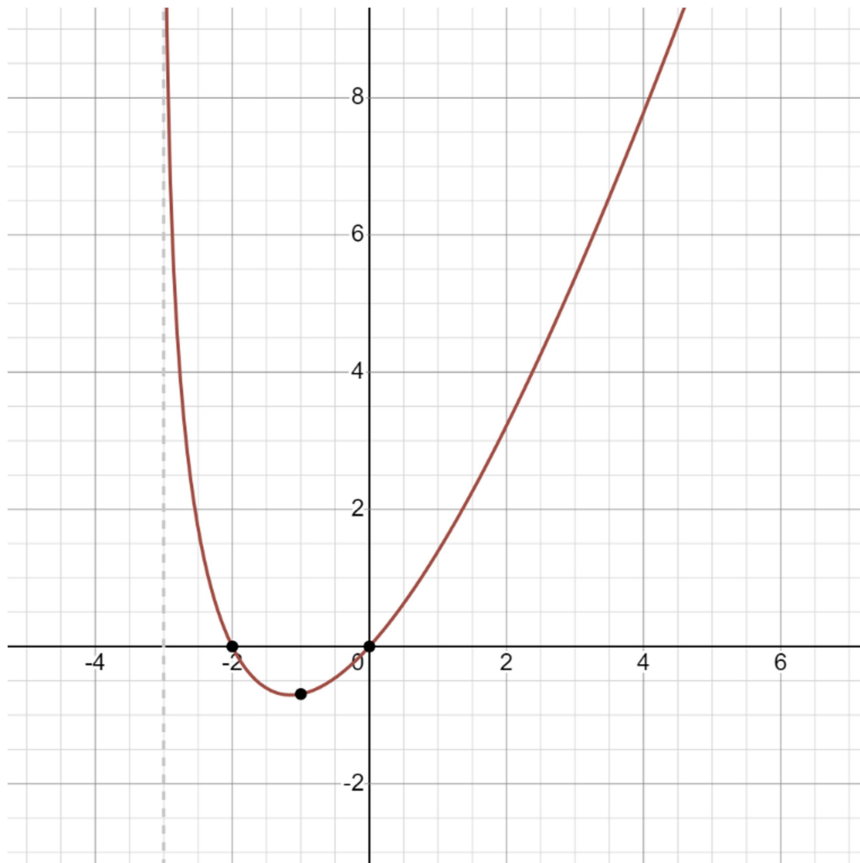
- **Beispiel 7:**

Bestimme das Verhalten der Funktion  $f(x) = x * \ln(x + 3)$  am Rand der Definitionsmenge.

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}^{>-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} x * \ln(x + 3) = -3 * -\infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x * \ln(x + 3) = +\infty * +\infty = +\infty$$



- **Beispiel 8:**

Bestimme das Verhalten der Funktion  $f(x) = \frac{\ln(x)-2}{x}$  am Rand der Definitionsmenge.

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x) - 2}{x} = \frac{-\infty - 2}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - 2}{x} = \frac{+\infty - 2}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} = ?$$

De L'Hospital:

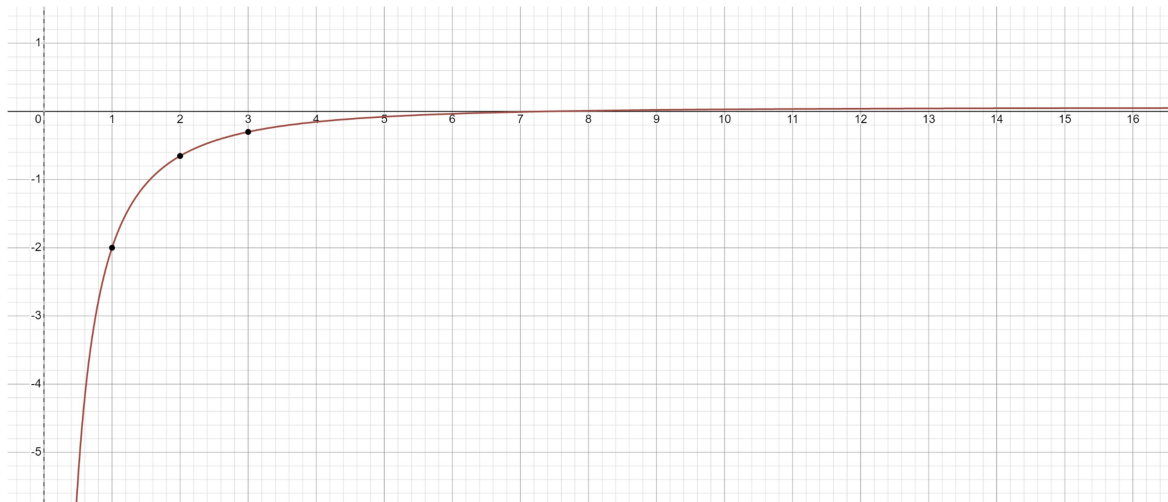
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Inhaltlich:

$\frac{+\infty}{+\infty}$  ist ein Widerspruch. Der Limes eines logarithmischen Terms wird jedoch durch den Limes einen nicht-logarithmischen Term dominiert, d.h:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - 2}{x} = \frac{+\infty - 2}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} = \frac{\text{Zahl}}{+\infty} = 0$$

Die Logarithmusfunktion hat eine senkrechte Asymptote bei  $x = 0$  und eine waagerechte Asymptote bei  $y = 0$ . Bei  $(e^2; 0)$  schneidet der Graph die x-Achse.



- **Beispiel 9:**

Bestimme das Verhalten der Funktion  $f(x) = 2 * \ln(x^2 - 1)$  am Rand der Definitionsmenge.

$$x^2 - 1 > 0$$

Bestimme die kritischen Werte durch Lösen der zugehörigen quadratischen Gleichung:

$$x^2 - 1 > 0$$

$$x^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = +1$$

Die möglichen Lösungsintervalle sind mithilfe dieser kritischen Werte zu ermitteln:

$$x < -1$$

$$-1 < x < +1$$

$$x > +1$$

Wähle einen Wert aus jedem Intervall:

$$\bar{x}_1 = -2$$

$$\bar{x}_2 = 0$$

$$\bar{x}_3 = +2$$

Um festzustellen, ob  $x < -1$  die Lösung der Ungleichung ist, prüfe, ob der gewählte Wert  $\bar{x}_1 = -2$  die ursprüngliche Ungleichung (bzw. deren Umformung) erfüllt etc.

$$x^2 - 1 > 0$$

$$(-2)^2 - 1 = +3 \Leftrightarrow +3 > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ ist keine Lösung}$$

$$(0)^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow -1 > 0 \Rightarrow -1 < x < +1 \text{ ist keine Lösung}$$

$$(+2)^2 - 1 = +3 \Leftrightarrow +3 > 0 \Rightarrow x > +1 \text{ ist eine Lösung}$$

Lösung:

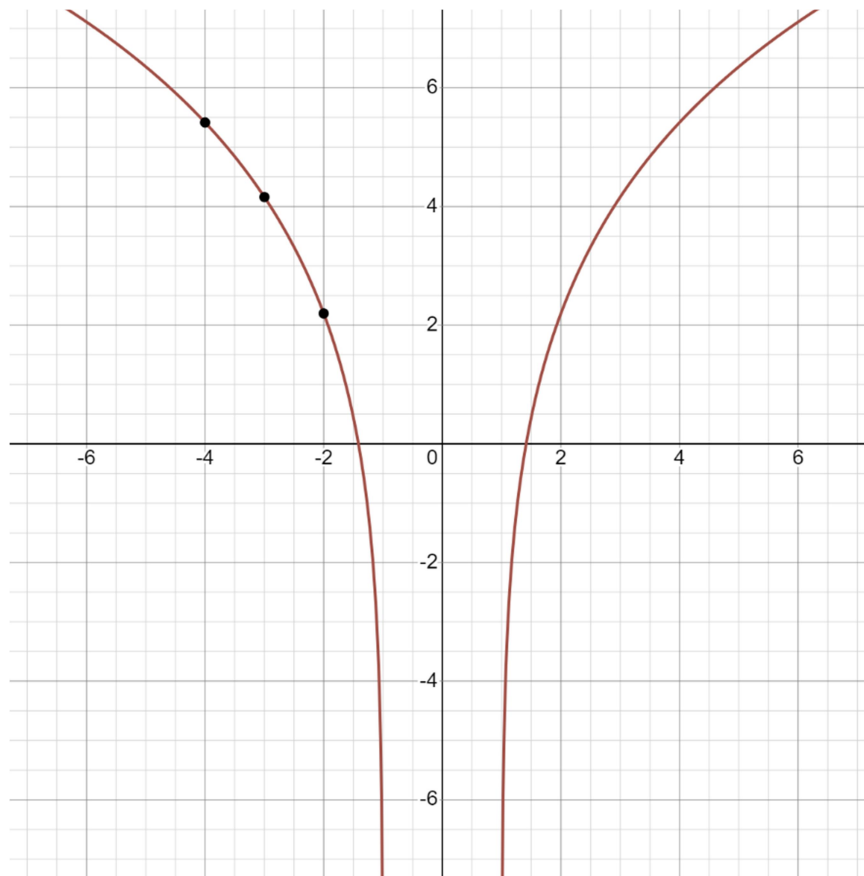
$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus ]-1; +1[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 * \ln(x^2 - 1) = 2 * +\infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} 2 * \ln(x^2 - 1) = 2 * -\infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +1^+} 2 * \ln(x^2 - 1) = 2 * -\infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 * \ln(x^2 - 1) = 2 * +\infty = +\infty$$



- **Beispiel 10:**

Bestimme den Grenzwert der folgenden Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$a_n = \sqrt{n} * (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} * (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$\sqrt{n}$  und  $\sqrt{n+1}$  laufen gegen  $\infty$ , es ist noch keine Aussage zum Grenzwert der Folge möglich. Daher sind zunächst Umformungen vorzunehmen.

$$\sqrt{n} * (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n} * \sqrt{n+1} - n$$

Erweiterung zwecks Anwendung der 3. Binomischen Formel:

$$(\sqrt{n} * \sqrt{n+1} - n) * \frac{\sqrt{n} * \sqrt{n+1} + n}{\sqrt{n} * \sqrt{n+1} + n} = \frac{(\sqrt{n} * \sqrt{n+1})^2 - n^2}{\sqrt{n} * \sqrt{n+1} + n} =$$

$$\frac{n * (n+1) - n^2}{\sqrt{n} * \sqrt{n+1} + n} = \frac{n}{\sqrt{n} * \sqrt{n+1} + n} = \frac{n}{\frac{\sqrt{n} * \sqrt{n} * \sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} + n} = \frac{n}{\frac{n * \sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} + n} =$$

$$\frac{n}{n * \left( \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} + 1 \right)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}$$

- **Beispiel 11:**

Bestimme den Grenzwert der folgenden Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$a_n = \frac{5^n - 9^n}{5^{n+1} - 3^{2n+2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 9^n}{5^{n+1} - 3^{2n+2}}$$

Minuend und Subtrahend im Zähler und Nenner ermöglichen insgesamt noch keine Aussage zum Grenzwert der Folge. Daher sind zunächst Umformungen vorzunehmen. Zielführend wäre eine Ausklammerung der größten Potenz, allerdings ist nicht direkt erkennbar, was die größte Potenz ist.

$$3^{2n+2} = (3^2)^{n+1} = 9^{n+1}$$

$$\frac{5^n - 9^n}{5^{n+1} - 3^{2n+2}} = \frac{5^n - 9^n}{5^{n+1} - 9^{n+1}}$$

$9^{n+1}$  als größte Potenz ausklammern:

$$\frac{9^{n+1} * \left( \frac{5^n}{9^{n+1}} - \frac{9^n}{9^{n+1}} \right)}{9^{n+1} * \left( \frac{5^{n+1}}{9^{n+1}} - 1 \right)} = \frac{\frac{5^n}{9^{n+1}} - \frac{9^n}{9^{n+1}}}{\frac{5^{n+1}}{9^{n+1}} - 1} = \frac{\frac{5^n}{9^n * 9^1} - \frac{9^n}{9^n * 9^1}}{\left( \frac{5}{9} \right)^{n+1} - 1} = \frac{\frac{1}{9} * \left( \frac{5}{9} \right)^n - \frac{1}{9}}{\left( \frac{5}{9} \right)^{n+1} - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{9} * \left( \frac{5}{9} \right)^n - \frac{1}{9}}{\left( \frac{5}{9} \right)^{n+1} - 1} = \frac{\frac{1}{9} * 0 - \frac{1}{9}}{0 - 1} = \frac{1}{9}$$

- **Beispiel 12:**

Bestimme die Grenzwerte der folgenden Funktion:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{4x^3 + 10}$$

$$\text{Asymptote: } x = \sqrt[3]{-\frac{5}{2}} = -1,35720881...$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{4x^3 + 10} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1,357...^-} \frac{2x^2 - 5x + 1}{4x^3 + 10} = \frac{+11,47007554}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1,357...^+} \frac{2x^2 - 5x + 1}{4x^3 + 10} = \frac{+11,47007554}{0^+} = +\infty$$

- **Schnittpunkte und Berührungspunkte von 2 Funktionen**

Zwei Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  berühren sich bei  $x_0$ , wenn

$$f(x_0) = g(x_0)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0$$

**Beispiel 1:**

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = x^3$$

$$x^2 = x^3$$

Die Gleichung wird so umgestellt, dass alle Terme auf einer Seite stehen, um sie gleich Null zu setzen:

$$x^2 - x^3 = 0$$

$$x^2 * (1 - x) = 0$$

Ein Produkt ist Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Daher werden die beiden Faktoren gleich Null gesetzt:

Erster Fall:

$$x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Zweiter Fall:

$$(1 - x) = 0 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1$$

$$g(0) = 0$$

$$g(1) = 1$$

Fraglich ist nun, ob die Punkte  $P_1 = (0; 0)$  und  $P_2 = (1; 1)$  Schnittpunkt oder Berührungspunkt sind.

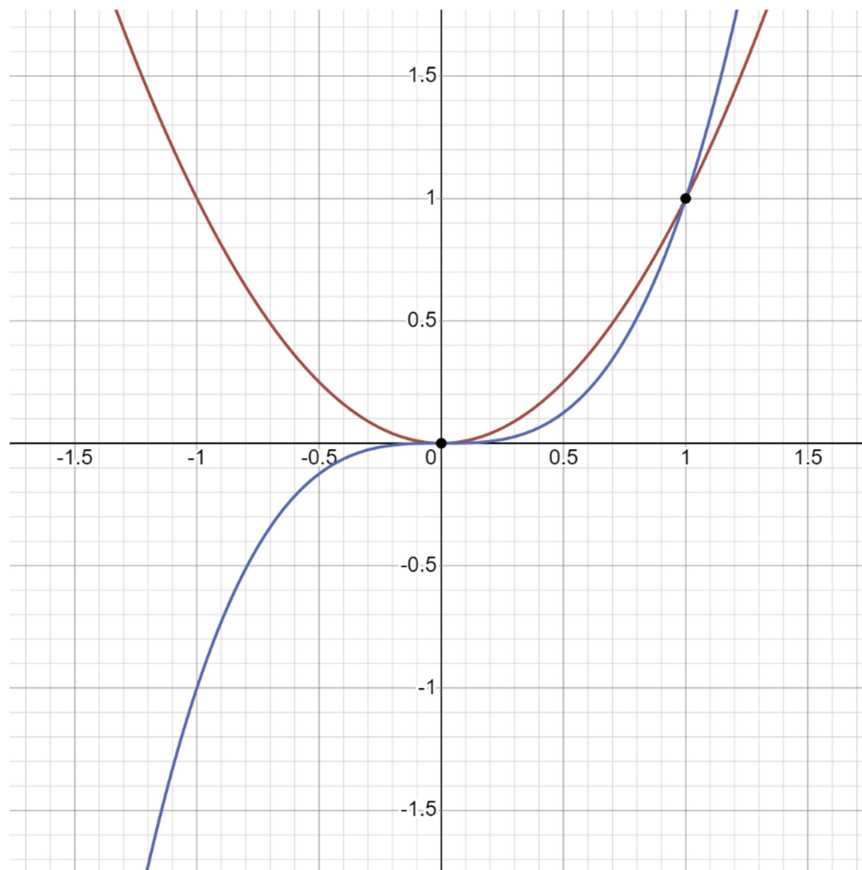
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^3}{x - 0} = 0 \Rightarrow P_1 = (0; 0) \text{ ist Berührungspunkt}$$

[Ermittelt durch Eingabe eines gegen 0 laufenden x-Wertes in den Taschenrechner.]

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x^3}{x - 1} = -1 \Rightarrow P_2 = (1; 1) \text{ ist Schnittpunkt}$$

[Ermittelt durch Eingabe eines gegen 1 laufenden x-Wertes in den Taschenrechner.]



Beispiel 2:

$$f(x) = \frac{3}{2}x - 1$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^3$$

$$\frac{3}{2}x - 1 = \frac{1}{2}x^3$$

$$\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 = 0$$

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$(x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 2$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = +1$$

$$f(-2) = -4$$

$$f(+1) = +0,5$$

$$g(-2) = -4$$

$$g(+1) = +0,5$$

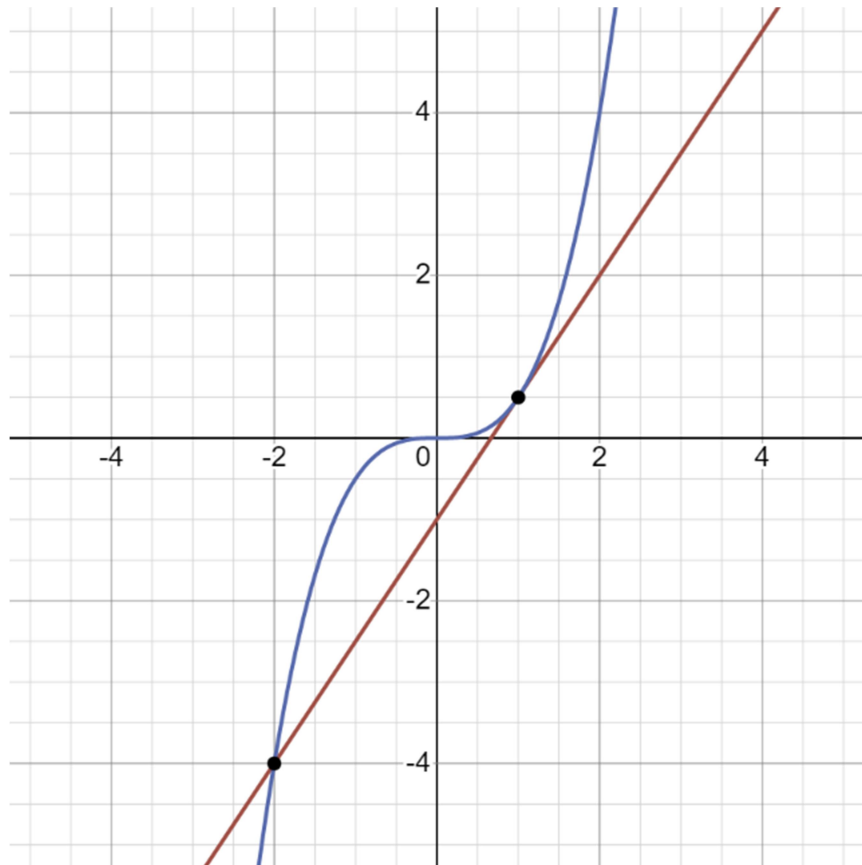
$$P_1 = (-2; -4)$$

$$P_2 = (+1; +0,5)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - g(x)}{x - (-2)} = -4,5 \Rightarrow P_1 = (-2; -4) \text{ ist Schnittpunkt}$$

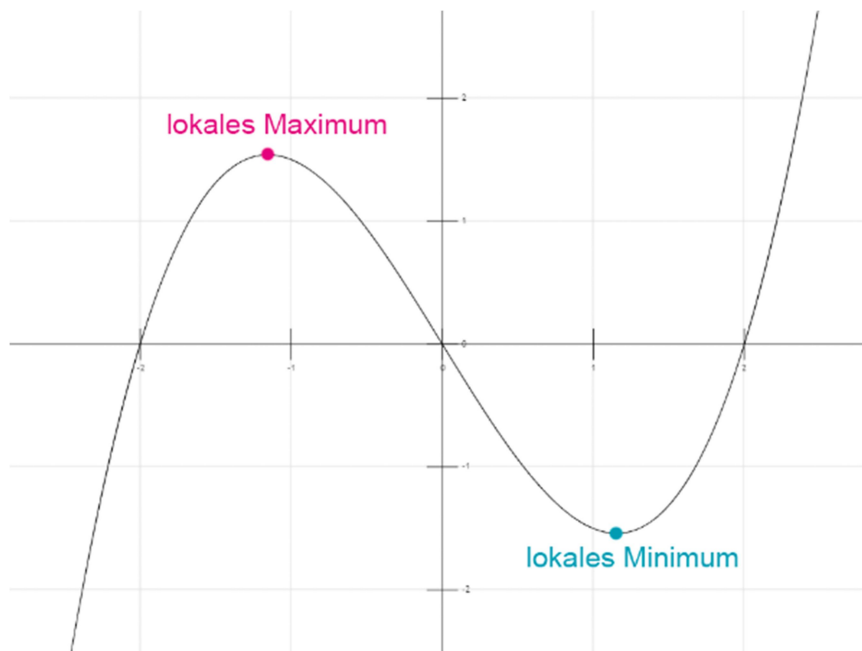
$$\lim_{x \rightarrow +1} \frac{f(x) - g(x)}{x - 1} = 0 \Rightarrow P_1 = (+1; +0,5) \text{ ist Berührungspunkt}$$



## 25. Differentialrechnung – Extrempunkte, Wendepunkte, Sattelpunkte –

- **Extrempunkte**

Extrempunkte können **lokale bzw. globale Hochpunkte** (Maxima) oder **lokale bzw. globale Tiefpunkte** (Minima) sein. In Hoch- und Tiefpunkten verändert sich das Monotonieverhalten (Steigungsverhalten) der Funktion, d.h. die Tatsache, ob die Kurve steigt oder fällt. Die Krümmung der Kurve (rechts gekrümmt oder links gekrümmt) bleibt jedoch gleich.



Eine Funktion muss nicht stetig sein, um einen Extrempunkt zu haben. Die Funktion  $f(x) = |x|$  ist bei  $x = 0$  stetig, hat dort ein globales Minimum, ist aber dort nicht differenzierbar.

In Extrempunkten ist die Steigung gleich Null. Da die erste Ableitung einer Funktion die Steigung dieser Funktion angibt, ist zur Extrempunktermittlung die erste Ableitung  $= 0$  zu setzen.

Notwendige Bedingung für einen Extrempunkt:  $f'(x) = 0$

Beispiel 1:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$$

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 11 = 0$$

$$x_1 = -\frac{11}{3}$$

$$x_2 = 1$$