Dipl.-Kfm. Ansgar Ostermann

Effektivverzinsung (Rendite) von festverzinslichen Wertpapieren

Vorwort

Seit vielen Jahren bin ich im Handel mit High Yield Bonds aktiv, dem ohne Anwendung mathematischer Methoden ein wesentliches Fundament fehlen würde. Die Effektivverzinsung (= Rendite) ist die wichtigste Kennzahl festverzinslicher Wertpapiere. Sie spiegelt die tatsächliche jährliche Rendite wider, die ein Anleger erhält, wenn er eine Anleihe zum aktuellen Kurs kauft und bis zum Ende der Laufzeit hält. Sie berücksichtigt neben dem Nominalzins (= Kupon) auch den aktuellen Kaufpreis und etwaige Kursgewinne bzw. Kursverluste.

Im vorliegenden Skript werden die Grundlagen der Effektivzinsberechnung erläutert. Die Excel-Anwendung $i_{eff}\ Professional$ dient dabei der Veranschaulichung einer EDV-gestützten Effektivzinsberechnung. Im Skript beispielhaft verwendete Zahlungsreihen sind teils komplexer als bei festverzinslichen Wertpapieren üblich, wodurch die Berechnungsmethodik besser verdeutlicht werden soll.

Ich freue mich über Anregungen, Kritik, Fehlerhinweise und Verbesserungsvorschläge, die Sie an folgende E-Mail-Adresse richten können:

ieff-professional@freenet.de

Berlin, im Juni 2026
Ansgar Ostermann

Gliederung

1. Grundlagen

2. EDV-gestützte Effektivzinsberechnung

3. Effektivverzinsung nach ISMA

4. Effektivverzinsung nach Moosmüller

5. Effektivverzinsung ohne unterjährigen Zinseszinseffekt

6. Rechenbeispiel

1. Grundlagen

- Die zentrale Frage einer Geldanlage ist, ob das investierte Kapital eine hinreichende Verzinsung erbringt. Zu Beginn einer Investition fällt in der Regel eine Anfangsauszahlung an. Während der Laufzeit der Investition werden dann zu unterschiedlichsten Terminen Einzahlungen generiert oder weitere Auszahlungen fällig. Die Investition kann somit über die Laufzeit der Geldanlage eine komplexe Zahlungsreihe ergeben. Anhand dieser Zahlungsreihe ist dann zu beurteilen, ob es sich um eine vorteilhafte Investition handelt.

- Der Effektivzins (= Effektivzinssatz, Rendite) bei Anleihen ist jener Zinssatz, bei dem die Anfangsauszahlung für eine Anleihe genau gleich dem Barwert aller Einzahlungsüberschüsse für diese Anleihe ist. Die Effektivverzinsung entspricht dem internen Zinsfuß (= interner Zinssatz).

- Der interne Zinsfuß ist jener Zinssatz, bei dem die Summe der diskontierten Zahlungsströme eines Investitionsobjektes Null wird. Er drückt die durchschnittliche Verzinsung des in einem Investitionsobjekt jeweils noch gebundenen Kapitals als Jahreszinssatz aus. Der interne Zinsfuß bzw. der Effektivzins ist somit ein Jahresdurchschnittszinssatz.

- Der interne Zinsfuß ermittelt sich aus der Zahlungsreihe beispielsweise einer Wertpapieranlage als derjenige Zinsfuß i_{eff}, mit dem die Einzahlungsüberschüsse E_t zum Zeitpunkt $t = 1, \ldots, n$ auf den Zeitpunkt $t = 0$ abgezinst werden müssen, damit die sich daraus ergebenden Einzahlungsbarwerte in ihrer Summe genau der Anfangsauszahlung A_0 entsprechen. Gesucht ist somit der Zinssatz, bei dem der Kapitalwert C_0 der Zahlungsreihe gleich Null wird:

$$C_0 = \sum_{t=1}^{n} E_t * (1 + i_{eff})^{-t} - A_0 = 0$$

$C_0 = Kapitalwert$
$t = 1, \ldots, n; t = Fortlaufende\ Zeitpunkte, zu\ denen\ jeweils\ eine\ Zahlung\ erfolgt,$
$erforderlichenfalls\ als\ gebrochene\ Jahreszahl\ darzustellen\ (z.B.$
$t = \frac{16}{365})$
$n = Anzahl\ der\ Zahlungsereignisse\ nach\ der\ Anfangsauszahlung$
$E_t = Einzahlungsüberschuss\ zum\ Zeitpunkt\ t = 1, \ldots, n$
$i_{eff} = Interner\ Zinsfuß, Effektivzinssatz$
$A_0 = Anfangsauszahlung$

Bei Auflösung dieser Gleichung nach i_{eff} erhält man den Effektivzinssatz (= Effektivverzinsung).

- Die in der Finanzpraxis gebräuchlichen Verfahren der Effektivzinsberechnung stellen Varianten der internen Zinsfußrechnung (= interne Zinsfußmethode, interne Zinssatzmethode) dar. Sie führen nur dann zu unterschiedlichen Effektivzinss-

ätzen, wenn Zahlungsreihen durch sog. gebrochene Laufzeiten und/oder unterjährige Einzahlungen gekennzeichnet sind.

- Eine exakte Bestimmung der Effektivverzinsung (= Rendite) bei gegebenem Kurs ist zumeist nicht ohne Weiteres möglich. In der Regel liegen nämlich Gleichungen höheren Grades[1] vor. Es wird daher auf sog. Iterationsverfahren zurückgegriffen, vorzugsweise auf die lineare Interpolation.

- Alternative Ansätze zur Ermittlung der Effektivverzinsung einer Anleihe basieren auf der unterschiedlichen Behandlung der unterjährig gezahlten Zinsen – beispielsweise bei Halbjahreskupons, also halbjährig gezahlten Zinsen – und der Zinsverrechnung bei gebrochenen Laufzeiten, d.h. wenn die Anleihe zwischen den Zinsterminen gekauft wird.

---

[1] Gleichungen n-ten Grades sind Gleichungen, deren höchste x-Potenz n ist, d.h. in denen x^n vorkommt. In einer Gleichung vierten Grades kommt x^4 vor. Eine allgemeine Lösungsdarstellung für Gleichungen vom Grad fünf oder höher ist nicht möglich ist. Es gibt allenfalls Lösungsformeln für Spezialfälle. Mit algebraischen Methoden (Berechnungsmethoden) lässt sich die Lösung einer Gleichung bis höchstens vierten Grades bewerkstelligen.

Gleichungen vom Grad 1 (lineare Gleichungen):	$ax + b = 0$ mit $a \neq 0$ Lösung: $x = – b/a$
Gleichungen vom Grad 2 (quadratische Gleichungen):	$ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ Lösung mit Lösungsformeln oder quadratischer Ergänzung.
Gleichungen vom Grad 3 (kubische Gleichungen):	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $a \neq 0$ Lösung mit spezieller Formel.
Gleichungen vom Grad 4 (quadratische Gleichungen):	$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e =0$ mit $a \neq 0$ Lösung mit spezieller Formel.
Gleichungen höheren Grades:	Eine allgemeine Lösungsformel, die nur mit den vier Grundrechenarten und dem Wurzelziehen auskommt, gibt es für Gleichungen höheren als vierten Grades nicht.

2. EDV-gestützte Effektivzinsberechnung

- Beispiel 1:

  Am 17.10.2010 erwirbt ein Investor einen GmbH-Anteil für 31.449,61 EUR. Am 15.03.2011 werden an ihn anteilige Gewinne i.H.v. 3.200,00 EUR ausgeschüttet. Weitere Ausschüttungen erfolgen am 12.12.2014 i.H.v. 7.020,00 EUR sowie am 01.03.2015 i.H.v. 9.193,33 EUR. Am 19.10.2016 werden aufgrund einer vertraglichen Nachschusspflicht 6.800,16 EUR zur Zahlung durch den Investor fällig. Am 30.12.2017 werden 9.520,00 EUR und am 18.07.2018 werden 8.773,32 EUR ausgeschüttet. Letztmalig erfolgt am 15.09.2021 im Rahmen der Liquidation der GmbH eine Zahlung i.H.v. 14.026,66 EUR.

  Mittels linearer Interpolation erhält man nach Maßgabe der jeweils angewandten Variante der Effektivzinsberechnung (z.B. ISMA-Rendite, Moosmüller-Rendite, Rendite ohne unterjährigen Zinseszinseffekt) und unter Berücksichtigung der jeweils angewandten Zinsberechnungsmethode (z.B. 30/360) verschiedene Effektivzinssätze:

i_{eff} Professional (30/360)

Berechnung der Effektivverzinsung (Rendite), Duration und Konvexität von Zahlungsreihen Haftung für Fehler ausgeschlossen!

© Mai 2025 by Dipl.-Kfm. Ansgar Ostermann

i_{eff} Professional ermöglicht mittels linearer Interpolation die Berechnung der Effektivverzinsung nach drei verschiedenen Verfahren. Datum und Zahlungsreihe sind in Spalte A bzw. B einzutragen. Eine Zahlungsreihe kann bis zu 221 Zahlungen umfassen. In den Feldern "*Geschätzter interner Zinssatz 1*" und "*Geschätzter interner Zinssatz 2*" sind durch Ausprobieren zwei Zinssätze zu finden, die geringfügig unter und über dem gesuchten internen Zinssatz liegen. Diese Zinssätze sind so zu wählen, dass der jeweils zugehörige Barwert die Anfangsauszahlung geringfügig überschreitet (Zinssatz 1) bzw. die Anfangsauszahlung geringfügig unterschreitet (Zinssatz 2). Dem Programm liegt die Zinsberechnungsmethode 30/360 (Tabellenblatt 1) bzw. act./365,25 (Tabellenblatt 2) bzw. act./365 (Tabellenblatt 3) zugrunde.

Zinsberechnungsmethode 30/360	
Datum	**Zahlungsreihe**
17.10.2010	-31.449,61
15.03.2011	3.200,00
12.12.2014	7.020,00
01.03.2015	9.193,33
19.10.2016	-6.800,16
30.12.2017	9.520,00
18.07.2018	8.773,32
15.09.2021	14.026,66

Berechnung der Effektivverzinsung nach ISMA				
Geschätzter interner Zinssatz 1:	5,362409%	Barwert 1:	31.449,61249	Muss etwas größer sein als Barwert 3.
Geschätzter interner Zinssatz 2:	5,362411%	Barwert 2:	31.449,60858	Muss etwas kleiner sein als Barwert 3.
ISMA-Rendite:	**5,362410%**	Barwert 3:	31.449,61000	Entspricht der Anfangsauszahlung.

Berechnung der Effektivverzinsung nach Moosmüller*				
Geschätzter interner Zinssatz 1:	9,762191%	Barwert 1:	31.449,61144	Muss etwas größer sein als Barwert 3.
Geschätzter interner Zinssatz 2:	9,762193%	Barwert 2:	31.449,60936	Muss etwas kleiner sein als Barwert 3.
Moosmüller-Periodenrendite:**	**9,762192%**	Barwert 3:	31.449,61000	Entspricht der Anfangsauszahlung.
Moosmüller-Jahresrendite:	**5,466825%**	**Ergebnis nicht valide, Subperioden sind unterschiedlich lang!**		

Berechnung der Effektivverzinsung ohne unterjährigen Zinseszinseffekt***				
Geschätzter interner Zinssatz 1:	5,358248%	Barwert 1:	31.449,61180	Muss etwas größer sein als Barwert 3.
Geschätzter interner Zinssatz 2:	5,358250%	Barwert 2:	31.449,60788	Muss etwas kleiner sein als Barwert 3.
Rendite ohne unterj. ZiZiEffekt:	**5,358249%**	Barwert 3:	31.449,61000	Entspricht der Anfangsauszahlung.

Vergleichsrechnung mit Excel-Funktion XINTZINSFUSS:	**5,359305%**
Macaulay-Duration auf Basis ISMA-Rendite [Jahre]:	**6,546775**
Modifizierte Duration auf Basis ISMA-Rendite:	**6,213578%**
Konvexität auf Basis ISMA-Rendite [Jahre²]:	**54,412241**

*) Die Moosmüller-Methode liefert nur unter der Bedingung valide Ergebnisse, dass alle nach der ersten Einzahlung stattfindenden Zahlungsperioden (die sog. Subperioden) gleich lang sind!

**) Die Moosmüller-Periodenrendite ist eine periodenkonforme unterjährige Rendite (Subperioden-Rendite) in Bezug auf die Länge der stattfindenden Zahlungsperioden und wird in die Moosmüller-Jahresrendite umgerechnet. Gebrochene Kuponperioden werden linear abgezinst.

***) Verfahren stellt unmittelbar auf Jahresrendite ab, wobei Periodenzahlungen mit Restlaufzeiten unter einem Jahr linear abgezinst werden. Die Effektivverzinsung ohne unterjährigen Zinseszinseffekt ist die Rendite bei gemischter Verzinsung.

  Diese internen Zinssätze drücken die durchschnittliche Verzinsung des in dem Investitionsobjekt jeweils noch gebundenen Kapitals als Jahreszinssatz aus.

- Bei Investitionsentscheidungen ist zu beachten, dass die interne Zinsfußmethode in bestimmten Sonderfällen aus mathematischen Gründen keine oder keine eindeutigen Lösungen liefert. Obgleich die interne Zinsfußmethode zu den wichtigsten Verfahren der dynamischen Investitionsrechnung zählt und gegenüber ande-

ren Verfahren wesentliche Vorteile aufweist, liegt die Problematik darin, dass eine Gleichung n-ten Grades mit $n = Anzahl\ der\ Zahlungsereignisse\ nach\ der\ An-fangsauszahlung$ zu lösen ist. Zur Bestimmung des internen Zinssatzes ist es notwendig, jenen Zinssatz zu ermitteln, bei dem der Kapitalwert gleich Null wird. Es ist also die Gleichung

$$C_0 = \sum_{t=1}^{n} E_t * (1 + i_{eff})^{-t} - A_0 = 0$$

bzw.

$$C_0 = \sum_{t=1}^{n} E_t * \frac{1}{q^t} - A_0 = 0$$

mit $q = 1 + i_{eff}$

nach q bzw. i_{eff} aufzulösen. Dies bedeutet, dass eine Gleichung n-ten Grades gelöst werden muss, denn eine Multiplikation der letztgenannten Gleichung mit q^n ergibt:

$$(E_n * 1) + (E_{n-1} * q^1) + (E_{n-2} * q^2) + \ldots + (E_2 * q^{n-2}) + (E_1 * q^{n-1}) - A_0 * q^n = 0$$

Der Grad n der zu lösenden Gleichung hängt von der Anzahl der Zahlungsereignisse nach der Anfangsauszahlung ab. Eine allgemeine Lösung durch eine immer gültige Lösungsformel ist aber nur für Gleichungen bis zum Grade $n = 4$ möglich. Gleichungen vom Grade $n > 4$ sind, von Spezialfällen abgesehen, nicht mehr allgemein lösbar. Der interne Zinssatz ist jedoch für $n \geq 4$ in der Regel näherungsweise über lineare Interpolation ermittelbar und nur für bestimmte Einzahlungs-/Auszahlungsreihen nicht eindeutig oder gar nicht bestimmbar.

- Nachfolgend werden zwei Beispiele dargestellt, bei denen die Methode des internen Zinssatzes aufgrund mathematischer Besonderheiten versagt:

  <u>Beispiel 2</u>:

  Am 02.01.2020 wird eine Anfangsauszahlung i.H.v. 10.000 EUR getätigt. Am 02.01.2021 wird eine Einzahlung i.H.v. 22.000 EUR erzielt und am 02.01.2022 fällt letztmalig eine Auszahlung i.H.v. 12.101 EUR an. Die Zahlungsreihe lautet folglich:

  t_0 = – 10.000 EUR
  t_1 = + 22.000 EUR
  t_2 = – 12.101 EUR

  Die mathematische Lösung ergibt sich wie folgt:

$$-10.000 + 22.000 * \frac{1}{q^1} - 12.101 * \frac{1}{q^2} = 0$$

$q = 1{,}1 \pm \sqrt{1{,}21 - 1{,}2101}$

Die Lösung dieser Gleichung liegt im imaginären Bereich (Quadratwurzel aus einer negativen Zahl), ein interner Zinssatz kann folglich nicht berechnet werden.

<u>Beispiel 3</u>:

Am 02.01.2020 wird eine Anfangsauszahlung i.H.v. 10.000 EUR getätigt. Am 02.01.2021 wird eine Einzahlung i.H.v. 22.000 EUR erzielt und am 02.01.2022 fällt letztmalig eine Auszahlung i.H.v. 12.091 EUR an. Die Zahlungsreihe lautet folglich:

t_0 = – 10.000 EUR
t_1 = + 22.000 EUR
t_2 = – 12.091 EUR

Die mathematische Lösung ergibt sich wie folgt:

$$-10.000 + 22.000 * \frac{1}{q^1} - 12.091 * \frac{1}{q^2} = 0$$

$q = 1{,}1 \pm \sqrt{1{,}21 - 1{,}2091}$

$q_1 = 1{,}13$
$q_2 = 1{,}07$

Die Lösung dieser Gleichung liefert also zwei interne Zinssätze, nämlich 13% und 7%. Die kaufmännische Logik lässt jedoch bei Betrachtung dieser Zahlungsreihe unmittelbar den Schluss zu, dass die beiden mathematisch errechneten Ergebnisse zu einer Fehlinterpretation der Zahlungsreihe führen würden, da die Investition eindeutig unvorteilhaft ist.

- Die Bestimmung des internen Zinssatzes heißt, den Schnittpunkt jener Kurve, die die Abhängigkeit des Kapitalwertes vom Zinssatz beschreibt, mit der Abszisse zu ermitteln. Je nach dem Verlauf dieser Kapitalwertkurve ist es nun möglich, dass kein Schnittpunkt, ein Schnittpunkt oder auch zwei oder mehrere Schnittpunkte und demnach keine, eine, zwei oder mehr Renditen existieren.

  Zur richtigen Entscheidung führt die interne Zinsfußmethode i.d.R. nur dann, wenn die Kapitalwertkurve wie folgt verläuft: Der Kapitalwert nimmt bei zunehmendem Zinssatz stets ab und erreicht genau einmal den Wert Null. Es existiert dann nur ein interner Zinssatz. Investitionen mit dieser Eigenschaft stellen den Regelfall dar, so dass die interne Zinsfußmethode zumeist anwendbar ist. Man muss sich allerdings darüber im Klaren sein, dass es bestimmte Zahlungskonstellationen gibt, bei denen die interne Zinsfußmethode versagt.

3. Effektivverzinsung nach ISMA[2]

- Kapitalwertgleichung nach ISMA:

$$C_0 = \sum_{t=1}^{T} E_t * (1 + i_{eff})^{-t/360} - A_0 = 0$$

C_0	=	Kapitalwert
t	=	Jeweilige Laufzeit in Tagen; fortlaufender ganzzahliger Tagezählwert (jeweilige Zahl der ganzzahligen Tage, die seit der Anfangsauszahlung vergangen sind), zu dem jeweils eine Zahlung diskontiert wird..
T	=	Restlaufzeit bzw. Gesamtlaufzeit in Tagen
E_t	=	Einzahlung (bzw. Einzahlungsüberschuss) am Tag t
i_{eff}	=	Effektiver Jahreszinssatz
A_0	=	Anfangsauszahlung

- Dem effektiven Jahreszinssatz i_{eff} entsprechend wird im Exponent die Zeiteinheit Jahre verwendet. Mithin wird eine jährliche Verzinsungsfrequenz unterstellt. Dabei sind sowohl ganzzahlige (z.B. 1.080/360 = 3 Jahre) als auch gebrochene Verzinsungsdauern (z.B. 177/360 = 0,491667 Jahre; 1.189/360 = 3,302778 Jahre) möglich.

- Bei der ISMA-Methode wird durchgehend exponentiell (= zinseszinslich) diskontiert.

- Bei der ISMA-Methode erfolgt der Zinszuschlag am Ende jeder Zinsperiode. Eine Zinsperiode ist identisch mit dem Zeitintervall zwischen zwei Zahlungen, entsprechend oft erfolgt somit der Zinszuschlag. Vom Zinszuschlag ist die Zinsverrechnung zu unterscheiden. Die Zinsverrechnung erfolgt täglich. Aus diesem Grund entspricht das der Zinsberechnung zugrunde gelegte Zinskapital schon nach einem Tag nicht mehr dem ausgezahlten Kapital.

- Das Verfahren stellt unmittelbar auf die Jahresrendite ab. Die ISMA-Methode zinst alle Zahlungsströme – auch solcher aus dem gebrochenen Laufzeitteil – exponentiell ab. Jede Zahlung wird direkt auf den Kauftag des Wertpapiers zinseszinslich diskontiert. Dabei werden täglich Zinseszinsen als Kalkulationsbasis für die Diskontierung zugrunde gelegt.

- Die ISMA-Methode umgeht die Problematik von unterjährigen Kupons und gebrochenen Perioden, indem sie bei der Berechnung von Diskontfaktoren gebrochene Exponenten zulässt. Damit ist eine exponentielle Diskontierung auch unterjährig erlaubt.

- Im Gegensatz zur Moosmüller-Methode wird bei der ISMA-Methode nicht nur für die Anzahl der ganzen Zinsperioden exponentiell diskontiert, sondern auch für

[2] ISMA = International Securities Market Association

gebrochene Perioden (= Teillaufzeiten). Jede Ein- oder Auszahlung wird also direkt exponentiell auf den Kauftag des Wertpapieres abgezinst.

- Endkapitalbetrachtung

Gegeben sei folgende Zahlungsreihe einer endfälligen Anleihe mit einer ISMA-Rendite i.H.v. 11,539553591% und einer Restlaufzeit von 956 Tagen bei 30/360:[3]

Datum	Zahlungsreihe
19.11.2015	-955,00
15.01.2016	40,00
15.07.2016	40,00
15.01.2017	40,00
15.07.2017	40,00
15.01.2018	40,00
15.07.2018	1.040,00

Die Verzinsung der Anfangsauszahlung über die gesamte Laufzeit mit der ISMA-Rendite führt zum selben Ergebnis wie der Endkapital der Zahlungsreihe bei Aufzinsung mit der ISMA-Rendite.

3

i_{eff} Professional (30/360)

Berechnung der Effektivverzinsung (Rendite), Duration und Konvexität von Zahlungsreihen Haftung für Fehler ausgeschlossen!

© Mai 2025 by Dipl.-Kfm. Ansgar Ostermann

i_{eff} Professional ermöglicht mittels linearer Interpolation die Berechnung der Effektivverzinsung nach drei verschiedenen Verfahren. Datum und Zahlungsreihe sind in Spalte A bzw. B einzutragen. Eine Zahlungsreihe kann bis zu 221 Zahlungen umfassen. In den Feldern "*Geschätzter interner Zinssatz 1*" und "*Geschätzter interner Zinssatz 2*" sind durch Ausprobieren zwei Zinssätze zu finden, die geringfügig unter und über dem gesuchten internen Zinssatz liegen. Diese Zinssätze sind so zu wählen, dass der jeweils zugehörige Barwert die Anfangsauszahlung geringfügig überschreitet (Zinssatz 1) bzw. die Anfangsauszahlung geringfügig unterschreitet (Zinssatz 2). Dem Programm liegt die Zinsberechnungsmethode 30/360 (Tabellenblatt 1) bzw. act./365,25 (Tabellenblatt 2) bzw. act./365 (Tabellenblatt 3) zugrunde.

Zinsberechnungsmethode 30/360	
Datum	Zahlungsreihe
19.11.2015	-955,00
15.01.2016	40,00
15.07.2016	40,00
15.01.2017	40,00
15.07.2017	40,00
15.01.2018	40,00
15.07.2018	1.040,00

Berechnung der Effektivverzinsung nach ISMA				
Geschätzter interner Zinssatz 1:	11,539553%	Barwert 1:	955,00001	Muss etwas größer sein als Barwert 3.
Geschätzter interner Zinssatz 2:	11,539555%	Barwert 2:	954,99997	Muss etwas kleiner sein als Barwert 3.
ISMA-Rendite:	**11,539554%**	Barwert 3:	955,00000	Entspricht der Anfangsauszahlung.

Berechnung der Effektivverzinsung nach Moosmüller*				
Geschätzter interner Zinssatz 1:	5,605131%	Barwert 1:	955,00003	Muss etwas größer sein als Barwert 3.
Geschätzter interner Zinssatz 2:	5,605133%	Barwert 2:	954,99994	Muss etwas kleiner sein als Barwert 3.
Moosmüller-Periodenrendite:**	**5,605132%**	Barwert 3:	955,00000	Entspricht der Anfangsauszahlung.
Moosmüller-Jahresrendite:	**11,524438%**			

Berechnung der Effektivverzinsung ohne unterjährigen Zinseszinseffekt***				
Geschätzter interner Zinssatz 1:	11,480222%	Barwert 1:	955,00002	Muss etwas größer sein als Barwert 3.
Geschätzter interner Zinssatz 2:	11,480224%	Barwert 2:	954,99998	Muss etwas kleiner sein als Barwert 3.
Rendite ohne unterj. ZiZiEffekt:	**11,480223%**	Barwert 3:	955,00000	Entspricht der Anfangsauszahlung.

Vergleichsrechnung mit Excel-Funktion XINTZINSFUSS:	11,541699%
Macaulay-Duration auf Basis ISMA-Rendite [Jahre]:	2,367740
Modifizierte Duration auf Basis ISMA-Rendite:	2,122781%
Konvexität auf Basis ISMA-Rendite [Jahre^2]:	6,776530

*) Die Moosmüller-Methode liefert nur unter der Bedingung valide Ergebnisse, dass alle nach der ersten Einzahlung stattfindenden Zahlungsperioden (die sog. Subperioden) gleich lang sind!

**) Die Moosmüller-Periodenrendite ist eine periodenkonforme unterjährige Rendite (Subperioden-Rendite) in Bezug auf die Länge der stattfindenden Zahlungsperioden und wird in die Moosmüller-Jahresrendite umgerechnet. Gebrochene Kuponperioden werden linear abgezinst.

***) Verfahren stellt unmittelbar auf Jahresrendite ab, wobei Periodenzahlungen mit Restlaufzeiten unter einem Jahr linear abgezinst werden. Die Effektivverzinsung ohne unterjährigen Zinseszinseffekt ist die Rendite bei gemischter Verzinsung.

Aus

Anfangsauszahlung	=	Barwert künftiger Einzahlungen (berechnet anhand Kapitalwertgleichung, d.h. mit negativen Exponenten)
	folgt	
Endkapital der Anfangsauszahlung (berechnet anhand der auf das Endkapital angepassten Kapitalwertgleichung, d.h. u.a. mit positiven Exponenten).	=	Endkapital künftiger Einzahlungen (berechnet anhand der auf das Endkapital angepassten Kapitalwertgleichung, d.h. u.a. mit positiven Exponenten).

i_{eff} (ISMA) = 11,539553591%

$$955{,}00 * (1 + 0{,}11539553591)^{956/360} = 1.276{,}30201765$$

$$\begin{aligned}
&\ 40{,}00 * (1 + 0{,}11539553591)^{900/360} \\
&+\ 40{,}00 * (1 + 0{,}11539553591)^{720/360} \\
&+\ 40{,}00 * (1 + 0{,}11539553591)^{540/360} \\
&+\ 40{,}00 * (1 + 0{,}11539553591)^{360/360} \\
&+\ 40{,}00 * (1 + 0{,}11539553591)^{180/360} \\
&+\ 1.040{,}00 \\
&=\ 1.276{,}30201765
\end{aligned}$$

4. Effektivverzinsung nach Moosmüller

- Kapitalwertgleichung nach Moosmüller:

$$C_0 = \sum_{subp=0}^{SUBP} E_t * (1 + i_{subp'})^{-subp} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{t_1}{t_{subp'}}\right)^{-1} - A_0 = 0$$

$$i_{eff} = (1 + i_{subp'})^{subp'} - 1$$

$$i_{eff} = (1 + i_{subp'})^{\frac{360}{t_{subp'}}} - 1$$

$$i_{subp'} = \left(1 + i_{eff}\right)^{\frac{1}{subp'}} - 1$$

$$i_{subp'} = \left(1 + i_{eff}\right)^{\frac{t_{subp'}}{360}} - 1$$

$$i_{subp'} = \frac{i_{nom}(subp')}{subp'}$$

C_0	=	Kapitalwert
subp	=	Jeweilige Laufzeit in Sub- bzw. Zinsperioden; fortlaufender ganzzahliger Subperiodenzählwert (jeweilige Zahl der ganzzahligen Subperioden, die seit der Anfangsauszahlung vergangen sind), zu dem jeweils eine Zahlung diskontiert wird. Für die erste Periode nach der Anfangsauszahlung ist subp = 0, so dass in der Kapitalwertgleichung der erste Diskontierungsfaktor $(1 + i_{subp'})^{-subp} = (1 + i_{subp'})^{-0}$ ist und damit gleich 1. Wenn die erste Periode nach der Anfangsauszahlung kürzer ist als die nachfolgenden Subperioden, wird die erste Einzahlung lediglich linear diskontiert. Dies entspricht gemischter Verzinsung.
SUBP	=	Restlaufzeit bzw. Gesamtlaufzeit in Subperioden, ggf. inkl. einer ersten verkürzten Subperiode.
subp'	=	Sub- bzw. Zinsperioden pro Jahr: Jahre (j = 1) ∨ Halbjahre (h = 2) ∨ Quartale (q = 4) ∨ Monate (m = 12) ∨ Tage (t = 360)
E_t	=	Einzahlung (bzw. Einzahlungsüberschuss) am Tag t
$i_{subp'}$	=	Subperioden-Rendite
t_1	=	Konstante Zahl der ganzzahligen Tage zwischen der ersten Einzahlung und der Anfangsauszahlung.
$t_{subp'}$		Konstante Dauer der Subperioden nach der ersten Einzahlung in ganzen Tagen.
A_0	=	Anfangsauszahlung
i_{eff}	=	Effektiver Jahreszinssatz
i_{nom}	=	Nomineller Jahreszinssatz

- Der Subperiodenrendite $i_{subp'}$ entsprechend werden im Exponenten die fortlaufenden Subperioden gezählt und jeweils als ganzzahliger Wert erfasst. Mithin wird eine Verzinsungsfrequenz unterstellt, die sich aus der konstanten Länge der je-

weiligen Subperiode ergibt. Dabei sind nur ganzzahlige Verzinsungsdauern möglich. Nur die Länge der ersten Periode zwischen Anfangsauszahlung und erster Einzahlung darf von der identischen Länge der sich anschließenden Subperioden abweichen. Wenn bei einem vorzeitigen Verkauf der Verkaufstag nicht mit einem regulären Zinstermin zusammenfällt, liefert die Moosmüller-Methode kein valides Ergebnis.

- Bei der Moosmüller-Methode wird im Bereich der Subperioden exponentiell (zinseszinslich) und für den Zeitraum von der Anfangsauszahlung bis zur ersten Einzahlung linear diskontiert, soweit dieser erste Zeitraum kürzer ist als die nachfolgenden Subperioden.

- Bei der Moosmüller-Methode erfolgt der Zinszuschlag am Ende der ersten Periode sowie am Ende jeder Subperiode.

- Hat z.B. ein Rentenpapier, das jährlich Zinsen zahlt, eine Restlaufzeit von dreieinhalb Jahren, dann ist das halbe Jahr eine sog. gebrochene Kuponperiode oder Teillaufzeit. Die Moosmüller-Methode arbeitet im Bereich der Teillaufzeiten mit linearer Abzinsung, d.h. ein Zinseszinseffekt wird in diesem Bereich nicht berücksichtigt.

- Die Moosmüller-Methode rechnet mit einem subperiodischen Effektivzins und stellt somit nicht unmittelbar auf die Jahresrendite ab. Nur bei Jahreskupons sind Periodenrendite (Subperiodenrendite) und Jahresrendite identisch. Bei Halb-, Vierteljahres- oder Monatskupons etc. wird zuerst eine Periodenrendite (Subperiodenrendite) für das Halbjahr, das Vierteljahr, den Monat etc. ermittelt und diese dann in den effektiven Jahreszinssatz umgerechnet. Die Ermittlung der jährlichen Effektivverzinsung erfolgt mithin zunächst auf Basis einer Periodenrendite (Subperiodenrendite), wobei diese Rendite pro Zinsperiode (Periodenrendite, Subperiodenrendite) anschließend in eine konforme Jahresrendite umzurechnen ist.

- Im Gegensatz zur ISMA-Methode wird bei der Moosmüller-Methode die erste Zinsperiode (gebrochene Zinsperiode) linear diskontiert.

- Die Moosmüller-Methode liefert nur unter der Bedingung valide Ergebnisse, dass alle nach der ersten Einzahlung stattfindenden Zahlungsperioden (die sog. Subperioden) gleich lang sind und dass ein vorzeitiger Verkauf, der nicht mit einem regulären Zinstermin zusammenfällt, nicht erfolgt.

- Die Moosmüller-Periodenrendite ist eine periodenkonforme und i.d.R. unterjährige Rendite (Subperiodenrendite) in Bezug auf die Länge der stattfindenden Zahlungsperioden und wird in die Moosmüller-Jahresrendite umgerechnet. Gebrochene Kuponperioden werden linear abgezinst. Es ist allerdings auch möglich, dass Subperioden länger als ein Jahr sind.

- Bei vollen Jahren und jährlicher Verzinsung sind die ISMA-Rendite und die Moosmüller-Rendite identisch.

  Bei Teilperioden ist die ist die ISMA-Rendite höher als die Moosmüller-Rendite.

- Endkapitalbetrachtung

Gegeben sei folgende Zahlungsreihe einer endfälligen Anleihe mit einer Moosmüller-Periodenrendite i.H.v. 5,605131678%, einer Moosmüller-Jahresrendite i.H.v. 11,524438367% und einer Restlaufzeit von 956 Tagen bei 30/360:

Datum	Zahlungsreihe
19.11.2015	-955,00
15.01.2016	40,00
15.07.2016	40,00
15.01.2017	40,00
15.07.2017	40,00
15.01.2018	40,00
15.07.2018	1.040,00

Die Verzinsung der Anfangsauszahlung über die gesamte Laufzeit mit der Moosmüller-Periodenrendite führt zum selben Ergebnis wie das Endkapital der Zahlungsreihe bei Aufzinsung mit der Moosmüller-Periodenrendite bzw. mit der Moosmüller-Jahresrendite.

Aus Anfangsauszahlung	=	Barwert künftiger Einzahlungen (berechnet anhand Kapitalwertgleichung, d.h. mit negativen Exponenten)
	folgt	
Endkapital der Anfangsauszahlung (berechnet anhand der auf das Endkapital angepassten Kapitalwertgleichung, d.h. u.a. mit positiven Exponenten).	=	Endkapital künftiger Einzahlungen (berechnet anhand der auf das Endkapital angepassten Kapitalwertgleichung, d.h. u.a. mit positiven Exponenten, bzw. alternativ anhand Aufzinsung mit der Moosmüller-Jahresrendite).

i_m (Moosmüller-Periodenrendite) = 5,605131678%
i_{eff} (Moosmüller-Jahresrendite) = 11,524438367%

$$955{,}00 * (1 + 0{,}05605131678)^{5} * (1 + 0{,}05605131678 * 56/180) = 1.276{,}25224077$$

$$\begin{aligned}
& 40{,}00 * (1 + 0{,}05605131678)^{5} * (1 + 0{,}056051131678 * 0/180)^{1} \\
+\ & 40{,}00 * (1 + 0{,}05605131678)^{4} * (1 + 0{,}056051131678 * 0/180)^{1} \\
+\ & 40{,}00 * (1 + 0{,}05605131678)^{3} * (1 + 0{,}056051131678 * 0/180)^{1} \\
+\ & 40{,}00 * (1 + 0{,}05605131678)^{2} * (1 + 0{,}056051131678 * 0/180)^{1} \\
+\ & 40{,}00 * (1 + 0{,}05605131678)^{1} * (1 + 0{,}056051131678 * 0/180)^{1} \\
+\ & 1.040{,}00 \\
=\ & 1.276{,}25224077
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 40{,}00 * (1 + 0{,}11524438367)^{900/360} + \\
+\ & 40{,}00 * (1 + 0{,}11524438367)^{720/360} + \\
+\ & 40{,}00 * (1 + 0{,}11524438367)^{540/360} +
\end{aligned}$$

$+ \; 40{,}00 * (1 + 0{,}11524438367)^{360/360} +$
$+ \; 40{,}00 * (1 + 0{,}11524438367)^{180/360} +$
$+ \; 1.040{,}00$
$= \; 1.276{,}25224077$

5. Effektivverzinsung ohne unterjährigen Zinseszinseffekt

- Kapitalwertgleichung zur Berechnung der Effektivverzinsung ohne unterjährigen Zinseszinseffekt:

$$C_0 = \sum_{j=0}^{J} E_t * (1 + i_{eff})^{-j} * \left(1 + i_{eff} * \frac{t_n - j * 360}{360}\right)^{-1} - A_0 = 0$$

C_0 = Kapitalwert

j = Jeweilige Laufzeit in Jahren; fortlaufender ganzzahliger Jahreszählwert (jeweilige Zahl der ganzzahligen Jahre, die seit der Anfangsauszahlung vergangen sind), zu dem jeweils eine Zahlung diskontiert wird. Wenn zwischen der ersten, zweiten, dritten etc. Einzahlung und der Anfangsauszahlung ein Zeitraum liegt, der kürzer als ein Jahr ist, ist j = 0, so dass in der Kapitalwertgleichung der Diskontierungsfaktor $(1 + i_{eff})^{-j} = (1 + i_{eff})^{-0}$ ist und damit gleich 1. In diesem Fall werden die entsprechenden ersten Einzahlungen lediglich linear diskontiert. Dies entspricht gemischter Verzinsung.

J = Gesamtlaufzeit in ganzen Jahren

E_t = Einzahlung (bzw. Einzahlungsüberschuss) am Tag t

i_{eff} = Effektiver Jahreszinssatz

t_n = Zahl der ganzzahligen Tage zwischen der jeweiligen Einzahlung und der Anfangsauszahlung. Für den nicht ganzzahligen Jahreszeitraum $t_n - j * 360$, d.h. für die restlichen unterjährigen Tage des Ein- oder Mehrjahreszeitraums, erfolgt lineare Diskontierung.

A_0 = Anfangsauszahlung

- Dem effektiven Jahreszinssatz i_{eff} entsprechend wird im Exponent die Zeiteinheit Jahre verwendet. Mithin wird eine jährliche Verzinsungsfrequenz unterstellt. Dabei sind nur ganzzahlige jährliche Verzinsungsdauern möglich. Im unterjährigen Bereich wird mit einem relativen Zinssatz gerechnet.

- Bei der Effektivverzinsung ohne unterjährigen Zinseszinseffekt wird im Bereich ganzer Jahre exponentiell (zinseszinslich) und im Bereich etwaiger gebrochener Jahre linear diskontiert.

- Bei der Effektivverzinsung ohne unterjährigen Zinseszinseffekt erfolgt der Zinszuschlag einmal jährlich jeweils nach Ablauf eines jeden vollen Jahres seit dem Zeitpunkt der Anfangsauszahlung.

- Bei Einzahlungen wird der Zeitraum zwischen der Einzahlung und der Anfangsauszahlung in einen ganzjährigen und ggf. mehrjährigen Teil und einen Teil der restlichen Tage zerlegt. Im ganzjährigen Bereich wird mit Zinseszinsen diskontiert, im unterjährigen Bereich wird linear diskontiert.

- Das Verfahren stellt unmittelbar auf die Jahresrendite ab. Die Effektivverzinsung ohne unterjährigen Zinseszinseffekt ist die Rendite bei gemischter Verzinsung.

- Die gemischte Verzinsung berücksichtigt den Zinseszinseffekt nur im Bereich der ganzen Zinsperioden (hier bezogen auf Jahre). Im Bereich der gebrochenen Zinsperiode wird er vernachlässigt. Das Verfahren arbeitet mit der Annahme, dass bei Konten in der Praxis oftmals nur einmal pro Jahr die Zinsen zugeschlagen werden. Für Verzinsungsdauern von unter einem Jahr erfolgt mithin nur eine lineare Verzinsung.

- Bei vollen Jahren und jährlicher Verzinsung sind die ISMA-Rendite, die Moosmüller-Rendite und die Rendite ohne unterjährigen Zinseszinseffekt identisch.

  Bei jährlicher Verzinsung und gebrochener erster Zinsperiode sind die Moosmüller-Rendite und die Rendite ohne unterjährigen Zinseszinseffekt identisch, aber niedriger als die ISMA-Rendite.

  Bei Teilperioden ist die ISMA-Rendite höher als die Moosmüller-Rendite und die Moosmüller-Rendite ist höher als die Rendite ohne unterjährigen Zinseszinseffekt.

- Endkapitalbetrachtung

  Gegeben sei folgende Zahlungsreihe einer endfälligen Anleihe mit einer Effektivverzinsung ohne unterjährigen Zinseszinseffekt i.H.v. 11,4802227831% und einer Restlaufzeit von 956 Tagen bei 30/360:

Datum	Zahlungsreihe
19.11.2015	-955,00
15.01.2016	40,00
15.07.2016	40,00
15.01.2017	40,00
15.07.2017	40,00
15.01.2018	40,00
15.07.2018	1.040,00

  Die Verzinsung der Anfangsauszahlung über die gesamte Laufzeit mit der Effektivverzinsung ohne unterjährigen Zinseszinseffekt führt zum selben Ergebnis wie das Endkapital der Zahlungsreihe bei Aufzinsung mit der Effektivverzinsung ohne unterjährigen Zinseszinseffekt (u.U. mit geringfügigen Abweichungen).

  Aus

Anfangsauszahlung	=	Barwert künftiger Einzahlungen (berechnet anhand Kapitalwertgleichung, d.h. mit negativen Exponenten)
	folgt	
Endkapital der Anfangsauszahlung (berechnet anhand der auf das Endkapital angepassten Kapitalwertgleichung, d.h. u.a. mit positiven Exponenten).	=	Endkapital künftiger Einzahlungen (berechnet anhand der auf das Endkapital angepassten Kapitalwertgleichung, d.h. u.a. mit positiven Exponenten).

i_{eff} (ohne unterjährigen Zinseszinseffekt) = 11,4802227831%

$$955{,}00 * (1 + 0{,}114802227831)^2 * (1 + 0{,}114802227831 * 236/360) = 1.276{,}18081054$$

$$\begin{aligned}
& 40{,}00 * (1 + 0{,}114802227831)^2 * (1 + 0{,}114802227831 * 180/360) \\
+\ & 40{,}00 * (1 + 0{,}114802227831)^2 * (1 + 0{,}114802227831 * 0/360) \\
+\ & 40{,}00 * (1 + 0{,}114802227831)^1 * (1 + 0{,}114802227831 * 180/360) \\
+\ & 40{,}00 * (1 + 0{,}114802227831)^1 * (1 + 0{,}114802227831 * 0/360) \\
+\ & 40{,}00 * (1 + 0{,}114802227831)^0 * (1 + 0{,}114802227831 * 180/360) \\
+\ & 1.040{,}00 \\
=\ & 1.276{,}3160664
\end{aligned}$$

6. Rechenbeispiel[4]

- Eine 6,8%ige Anleihe besitzt im Kaufzeitpunkt noch eine Restlaufzeit von 5,6 Jahren, die Rücknahme erfolgt zu 103%, pro Jahr existieren zwei Zinstermine (jeweils mit halbem Jahres-Kupon). Der nächste Halbjahreskupon ist 0,1 Jahre nach dem Kaufzeitpunkt fällig. Der börsennotierte Nettokurs ("*clean price*", d.h. ohne Stückzinsen) beträgt im Kaufzeitpunkt 86,80%.

  Zinsberechnungsmethode: 30/360.

  Man ermittle die Rendite des Papiers über die Restlaufzeit.

  Hinweise zur Sückzinsberechnung bei 30/360:

  Kaufzeitpunkt und Valutadatum sei der 01.01.2010. 0,1 Jahre = 36 Tage. 0,1 Jahre nach dem 01.01.2010 wäre dann der 07.02.2010. Stückzinsen sind somit vom 07.08.2009 (einschließlich) bis zum 30.12.2009 (einschließlich) zu zahlen = 144 Tage.

  $$Stückzinsen = \frac{6{,}8}{360} * 144 = 2{,}72\ EUR$$

  $$Zahlbetrag\ zum\ 01.01.2010 = 86{,}80 + 2{,}72 = 89{,}52\ EUR$$

[4] Tietze, Übungsbuch zur Finanzmathematik, 8. Auflage, S. 106, 340.

- **Lösung mit i_{eff} Professional**

i_{eff} Professional (30/360)

Berechnung der Effektivverzinsung (Rendite), Duration und Konvexität von Zahlungsreihen

Haftung für Fehler ausgeschlossen!

© Mai 2025 by Dipl.-Kfm. Ansgar Ostermann

i_{eff} Professional ermöglicht mittels linearer Interpolation die Berechnung der Effektivverzinsung nach drei verschiedenen Verfahren. Datum und Zahlungsreihe sind in Spalte A bzw. B einzutragen. Eine Zahlungsreihe kann bis zu 221 Zahlungen umfassen. In den Feldern "*Geschätzer interner Zinssatz 1*" und "*Geschätzter interner Zinssatz 2*" sind durch Ausprobieren zwei Zinssätze zu finden, die geringfügig unter und über dem gesuchten internen Zinssatz liegen. Diese Zinssätze sind so zu wählen, dass der jeweils zugehörige Barwert die Anfangsauszahlung geringfügig überschreitet (Zinssatz 1) bzw. die Anfangsauszahlung geringfügig unterschreitet (Zinssatz 2). Dem Programm liegt die Zinsberechnungsmethode 30/360 (Tabellenblatt 1) bzw. act./365,25 (Tabellenblatt 2) bzw. act./365 (Tabellenblatt 3) zugrunde.

Zinsberechnungsmethode 30/360	
Datum	**Zahlungsreihe**
01.01.2010	-89,52
07.02.2010	3,40
07.08.2010	3,40
07.02.2011	3,40
07.08.2011	3,40
07.02.2012	3,40
07.08.2012	3,40
07.02.2013	3,40
07.08.2013	3,40
07.02.2014	3,40
07.08.2014	3,40
07.02.2015	3,40
07.08.2015	106,40

Berechnung der Effektivverzinsung nach ISMA				
Geschätzter interner Zinssatz 1:	10,640676%	Barwert 1:	89,52001	Muss etwas größer sein als Barwert 3.
Geschätzter interner Zinssatz 2:	10,640679%	Barwert 2:	89,51999	Muss etwas kleiner sein als Barwert 3.
ISMA-Rendite:	**10,640677%**	Barwert 3:	89,52000	Entspricht der Anfangsauszahlung.

Berechnung der Effektivverzinsung nach Moosmüller*				
Geschätzter interner Zinssatz 1:	5,183482%	Barwert 1:	89,52001	Muss etwas größer sein als Barwert 3.
Geschätzter interner Zinssatz 2:	5,183484%	Barwert 2:	89,51999	Muss etwas kleiner sein als Barwert 3.
Moosmüller-Periodenrendite:**	**5,183483%**	Barwert 3:	89,52000	Entspricht der Anfangsauszahlung.
Moosmüller-Jahresrendite:	**10,635651%**			

Berechnung der Effektivverzinsung ohne unterjährigen Zinseszinseffekt***				
Geschätzter interner Zinssatz 1:	10,614359%	Barwert 1:	89,52001	Muss etwas größer sein als Barwert 3.
Geschätzter interner Zinssatz 2:	10,614363%	Barwert 2:	89,51999	Muss etwas kleiner sein als Barwert 3.
Rendite ohne unterj. ZiZiEffekt:	**10,614361%**	Barwert 3:	89,52000	Entspricht der Anfangsauszahlung.

Vergleichsrechnung mit Excel-Funktion XINTZINSFUSS:	**10,640027%**
Macaulay-Duration auf Basis ISMA-Rendite [Jahre]:	**4,542229**
Modifizierte Duration auf Basis ISMA-Rendite:	**4,105388%**
Konvexität auf Basis ISMA-Rendite [Jahre^2]:	**23,114503**

*) Die Moosmüller-Methode liefert nur unter der Bedingung valide Ergebnisse, dass alle nach der ersten Einzahlung stattfindenden Zahlungsperioden (die sog. Subperioden) gleich lang sind!

**) Die Moosmüller-Periodenrendite ist eine periodenkonforme unterjährige Rendite (Subperioden-Rendite) in Bezug auf die Länge der stattfindenden Zahlungsperioden und wird in die Moosmüller-Jahresrendite umgerechnet. Gebrochene Kuponperioden werden linear abgezinst.

***) Verfahren stellt unmittelbar auf Jahresrendite ab, wobei Periodenzahlungen mit Restlaufzeiten unter einem Jahr linear abgezinst werden. Die Effektivverzinsung ohne unterjährigen Zinseszinseffekt ist die Rendite bei gemischter Verzinsung.

- **Berechnung der Effektivverzinsung nach ISMA**

$$C_0 = \sum_{t=1}^{T} E_t * (1 + i_{eff})^{-t/360} - A_0 = 0$$

$$C_0'(10{,}640676\%) =$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{36}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{216}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{396}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{576}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{756}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{936}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{1.116}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{1.296}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{1.476}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{1.656}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{1.836}{360}} +$$
$$1{,}064 * (1 + i_{eff})^{-\frac{2.016}{360}} = 89{,}52001\%$$

$$C_0'(10{,}640679\%) =$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{36}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{216}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{396}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{576}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{756}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{936}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{1.116}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{1.296}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{1.476}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{1.656}{360}} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-\frac{1.836}{360}} +$$
$$1{,}064 * (1 + i_{eff})^{-\frac{2.016}{360}} = 89{,}51999\%$$

$$
\begin{aligned}
i_1 &= 10{,}640676\% \rightarrow C_0'(i_1) = 89{,}52001\% \\
i' &= \ ? \qquad\qquad\qquad \rightarrow C_0'(i') = 89{,}52\% \\
i_2 &= 10{,}640679\% \rightarrow C_0'(i_2) = 89{,}51999\%
\end{aligned}
$$

$$
\frac{0{,}10640676 - i'}{0{,}10640676 - 0{,}10640679} = \frac{0{,}8952001 - 0{,}8952}{0{,}8952001 - 0{,}8951999} \Rightarrow i' = 10{,}6406775\%
$$

- **Berechnung der Effektivverzinsung nach Moosmüller**

$$C_0 = \sum_{subp=0}^{SUBP} E_t * (1 + i_{subp'})^{-subp} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{t_1}{t_{subp'}}\right)^{-1} - A_0 = 0$$

$$C_0'(5{,}183482\%) =$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-0} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-1} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-2} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-3} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-4} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-5} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-6} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-7} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-8} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-9} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-10} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$1{,}064 * (1 + i_{subp'})^{-11} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} = 89{,}52001\%$$

$$C_0'(5{,}183484\%) =$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-0} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-1} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-2} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-3} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-4} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-5} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-6} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$

$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-7} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-8} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-9} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{subp'})^{-10} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} +$$
$$1{,}064 * (1 + i_{subp'})^{-11} * \left(1 + i_{subp'} * \frac{36}{180}\right)^{-1} = 89{,}51999\%$$

$i_1 = 5{,}183482\% \rightarrow C_0'(i_1) = 89{,}52001\%$
$i' = \ ? \qquad\qquad \rightarrow C_0'(i') = 89{,}52\%$
$i_2 = 5{,}183484\% \rightarrow C_0'(i_2) = 89{,}51999\%$

$$\frac{0{,}05183482 - i'}{0{,}05183482 - 0{,}05183484} = \frac{0{,}8952001 - 0{,}8952}{0{,}8952001 - 0{,}8951999} \Rightarrow i' = 5{,}183483\%$$

$$i_{eff} = (1 + i_{subp'})^{subp'} - 1$$

$$i_{eff} = (1 + 0{,}05183483)^2 - 1 = 10{,}635651\%$$

- **Berechnung der Effektivverzinsung ohne unterjährigen Zinseszinseffekt**

$$C_0 = \sum_{j=0}^{J} E_t * (1 + i_{eff})^{-j} * \left(1 + i_{eff} * \frac{t_n - j * 360}{360}\right)^{-1} - A_0 = 0$$

$$C_0'(10{,}614359\%) =$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-0} * \left(1 + i_{eff} * \frac{36 - 0 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-0} * \left(1 + i_{eff} * \frac{216 - 0 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-1} * \left(1 + i_{eff} * \frac{396 - 1 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-1} * \left(1 + i_{eff} * \frac{576 - 1 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-2} * \left(1 + i_{eff} * \frac{756 - 2 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-2} * \left(1 + i_{eff} * \frac{936 - 2 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-3} * \left(1 + i_{eff} * \frac{1.116 - 3 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-3} * \left(1 + i_{eff} * \frac{1.296 - 3 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-4} * \left(1 + i_{eff} * \frac{1.476 - 4 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-4} * \left(1 + i_{eff} * \frac{1.656 - 4 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-5} * \left(1 + i_{eff} * \frac{1.836 - 5 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$1{,}064 * \left(1 + i_{eff}\right)^{-5} * \left(1 + i_{eff} * \frac{2.016 - 5 * 360}{360}\right)^{-1} = 89{,}52001\%$$

$$C_0'(10{,}614363\%) =$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-0} * \left(1 + i_{eff} * \frac{36 - 0 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-0} * \left(1 + i_{eff} * \frac{216 - 0 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-1} * \left(1 + i_{eff} * \frac{396 - 1 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-1} * \left(1 + i_{eff} * \frac{576 - 1 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-2} * \left(1 + i_{eff} * \frac{756 - 2 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-2} * \left(1 + i_{eff} * \frac{936 - 2 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-3} * \left(1 + i_{eff} * \frac{1.116 - 3 * 360}{360}\right)^{-1} +$$

$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-3} * \left(1 + i_{eff} * \frac{1.296 - 3 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-4} * \left(1 + i_{eff} * \frac{1.476 - 4 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-4} * \left(1 + i_{eff} * \frac{1.656 - 4 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$0{,}034 * (1 + i_{eff})^{-5} * \left(1 + i_{eff} * \frac{1.836 - 5 * 360}{360}\right)^{-1} +$$
$$1{,}064 * \left(1 + i_{eff}\right)^{-5} * \left(1 + i_{eff} * \frac{2.016 - 5 * 360}{360}\right)^{-1} = 89{,}51999\%$$

$i_1 = 10{,}614359\% \rightarrow C_0'(i_1) = 89{,}52001\%$
$i' = \ ? \qquad\qquad\qquad \rightarrow C_0'(i') = 89{,}52\%$
$i_2 = 10{,}614363\% \rightarrow C_0'(i_2) = 89{,}51999\%$

$$\frac{0{,}10614359 - i'}{0{,}10614359 - 0{,}10614363} = \frac{0{,}8952001 - 0{,}8952}{0{,}8952001 - 0{,}8951999} \Rightarrow i' = 10{,}614361\%$$