

Dipl.-Kfm. Ansgar Ostermann

Duration



Vorwort

Seit vielen Jahren bin ich im Handel mit High Yield Bonds aktiv, dem ohne Anwendung mathematischer Methoden ein wesentliches Fundament fehlen würde. Neben Renditeberechnungen gehören bei festverzinslichen Wertpapieren Durationskonzepte einschließlich Konvexität zum Standardrepertoire der mathematischen Analyse, um Zinsänderungsrisiken zu steuern.

Im vorliegenden Skript werden die Grundlagen der Duration und der Konvexität erläutert und durch zahlreiche Aufgaben vertieft.

Ich freue mich über Anregungen, Kritik, Fehlerhinweise und Verbesserungsvorschläge, die Sie an folgende E-Mail-Adresse richten können:

ieff-professional@freenet.de

Berlin, im Juli 2026
Ansgar Ostermann

Gliederung

- 1. Grundlagen**
- 2. Macaulay-Duration (= einfache Duration)**
- 3. Wertänderung einer Anleihe in Abhängigkeit von Zinsänderungen**
- 4. Immunisierung**
- 5. Modifizierte Duration**
- 6. Macaulay-Duration und Modifizierte Duration von Zerobonds**
- 7. Macaulay-Duration und Modifizierte Duration von Perpetuals**
- 8. Macaulay-Portfolioduration und Modifizierte Portfolioduration**
- 9. Konvexität**
- 10. Taylor-Reihenentwicklung**
- 11. Näherungsformeln zur Berechnung der Modifizierten Duration und der Konvexität**

1. Grundlagen

- Die Duration ist eine Risikokennzahl für festverzinsliche Wertpapiere. Konkret ist die Duration ein Maß für die Sensitivität eines festverzinslichen Wertpapiers gegenüber Zinsänderungen.
- Für Anleger in festverzinslichen Wertpapieren ist die Sensibilität dieses Finanzinstruments für Zinsänderungen von erheblicher Bedeutung. Risikomessungen mittels **Duration** und **Konvexität** ermöglichen, diese Empfindlichkeit für kleine Änderungen der Marktzinssätze zu messen und daraus Schlussfolgerungen für Transaktionsentscheidungen zu ziehen.

2. Macaulay-Duration (= einfache Duration)

- Die Macaulay-Duration, auch durchschnittliche Kapitalbindungsdauer genannt, ist eine in Jahren gemessene Kennzahl für Zinspapiere. Die Macaulay-Duration gibt die durchschnittliche Kapitalbindungsdauer einer Anleihe in Jahren an. Die Macaulay-Duration hat somit die Dimension der Zeit. Sie ist der gewichtete Durchschnitt der Zeitpunkte, zu denen der Anleger Zahlungen aus einem Wertpapier erhält. Dabei dienen die Barwerte der Zahlungsströme als Gewichtungsfaktoren. Die Macaulay-Duration ist somit das mit dem jeweiligen Barwert gewichtete arithmetische Mittel der Zahlungszeitpunkte einer Anleihe. Die Macaulay-Duration ist somit die **durchschnittliche Restbindungsdauer des in einem Zinspapier angelegten Kapitals in Jahren**. Sobald bei einer Anleihe Zinszahlungen erfolgen, erhält der Anleger einen Teil seines investierten Kapitals zurück. In diesem Fall sinkt die durchschnittliche Kapitalbindungsdauer und somit die Macaulay-Duration. Je höher der Nominalzins einer Anleihe ist, umso schneller erhält der Anleger das eingezahlte Kapital zurück und umso geringer ist folglich die Macaulay-Duration. Je geringer der Nominalzins einer Anleihe ist, umso höher ist die Macaulay-Duration.
- Die Macaulay-Duration kann somit als mittlere Selbstliquidationsdauer einer Anleihe verstanden werden, sofern die Anleihe bis zur Endfälligkeit gehalten wird. Die als Macaulay-Duration angegebene Jahreszahl bezeichnet somit den durchschnittlichen Zeitraum, bis das in die Anleihe investierte Kapital wieder an den Anleger zurückgeflossen ist. Bei "normalen" Anleihen ist die Macaulay-Duration kürzer als die Restlaufzeit, da sich durch zwischenzeitliche Zinszahlungen auf das angelegte Kapital die Amortisationsdauer verkürzt. Bei Zerobonds (= Nullkuponanleihen) ist die Macaulay-Duration gleich der Restlaufzeit.
- Die Macaulay-Duration misst, wie empfindlich der Kurs eines festverzinslichen Wertpapiers auf Änderungen des Marktzinssatzes reagiert. Je höher die Macaulay-Duration, umso stärker sinkt der Kurs der Anleihe bei steigenden Zinsen (und umgekehrt). Eine hohe Macaulay-Duration geht einher mit längeren Zahlungsreihen, die wiederum mit größeren Schwankungen bei deren Barwerten (= Kursen) infolge von Zinsänderungen einhergehen. Je weiter die Zahlungen (= Kupons und Tilgung) in der Zukunft liegen, umso stärker wirkt der Zinseszinsseffekt bei der Abzinsung.
- Die Macaulay-Duration ist von folgenden Faktoren abhängig:
 - ⇒ Laufzeit der Anleihe (positiver Zusammenhang)
 - ⇒ Höhe der Kupons (negativer Zusammenhang)
 - ⇒ Marktzinsniveau bzw. Rendite (negativer Zusammenhang)
- Prinzipiell basiert das Risikomaß der Macaulay-Duration auf der Grundidee, dass das Zinsänderungsrisiko direkt mit der Restlaufzeit zusammenhängt. So ist das Risiko umso höher, je länger eine Anleihe läuft. Ferner ist die Macaulay-Duration umso höher, je niedriger der Kupon und je niedriger die Rendite ist.
- Das Durationskonzept empfiehlt Anlegern, die durchschnittliche Bindungsdauer einer Anleihe bzw. eines Anleihenportfolios nach ihren individuellen Anlagehori-

zonten zu wählen. Nur wenn der individuelle Anlagehorizont mit der Duration übereinstimmt, kann ein vorab angestrebter Endwert unabhängig von eventuellen Marktzinsänderungen realisiert werden.

- Zinsänderungsrisiken beziehen sich im Durationskonzept auf das Endwertänderungsrisiko und auf das Kurswertänderungsrisiko. Endwert- und Kurswertänderungsrisiko verhalten sich bei einer Marktzinsänderung gegenläufig. Durch ein sinkendes Marktzinsniveau steigt der Kurs einer Anleihe und sinkt der Endwert einer Anleihe, da die zufließenden Kuponzinsen nur noch zu geringeren Marktzinsen bis zur Anleihefälligkeit angelegt werden können.
- Das Durationskonzept macht sich die Gegenläufigkeit der beiden Zinsänderungsrisiken zunutze, indem jener Zeitpunkt berechnet wird, an dem sich die Wirkungen beider Effekte ausgleichen.
- Formel der Macaulay-Duration

$$D_{Mac} = \frac{\sum_{t>0}^T t * \frac{CF_t}{(1+i_{eff})^t}}{\sum_{t>0}^T \frac{CF_t}{(1+i_{eff})^t}}$$

wobei

$$\sum_{t>0}^T \frac{CF_t}{(1+i_{eff})^t} = C'_0(i_{eff})$$

D_{Mac} = Macaulay-Duration [Jahre]

t (für $t > 0$) = Jeweils vergangene Zeit seit der Anfangsauszahlung zum Zeitpunkt des Anfalls eines Einzahlungsüberschusses [Jahre]

T = Restlaufzeit [Jahre]

CF_t = Cashflow (= Einzahlungsüberschuss) in Periode $t > 0$

i_{eff} = Effektivzinssatz, interner Zinsfuß der Anleihe (= ISMA-Rendite), Jahresrendite, Marktzinssatz

$1 + i_{eff} = q'$ = Aufzinsungsfaktor unter Berücksichtigung des Effektivzinssatzs i_{eff}

$1 + i_{nom} = q$ = Aufzinsungsfaktor unter Berücksichtigung des Nominalzinssatzs i_{nom}

$C'_0(i_{eff}) = C'_{0(dirty)}(i_{eff})$ = Kurs (Dirty Price) bzw. Barwert einer Anleihe im Zeitpunkt $t = 0$. Der Kurs wird anhand einer gegebenen Rendite berechnet. Im Falle einer gebrochenen Kuponperiode ergibt sich ein Dirty Price, d. h. ein Kurs inkl. Stückzinsen.

C_0 = Kapitalwert

$C_0 = \sum$ Diskontierte zukünftige Einzahlungsüberschüsse $- A_0$

$C_0 = C'_0 - A_0 \Leftrightarrow C'_0 = A_0$

A_0 = Anfangsauszahlung in %

Beispiel 1:

Nominalwert Anleihe = 1.000 EUR

Restlaufzeit = 3 Jahre

Zinszahlung = jährlich

Kupon = 4% p.a.

Rendite = 5%

$$D_{Mac} = \frac{\sum_{t>0}^T t * \frac{CF_t}{(1+i_{eff})^t}}{\sum_{t>0}^T \frac{CF_t}{(1+i_{eff})^t}}$$

$$D_{Mac} = \frac{1 * \frac{40}{(1+0,05)^1} + 2 * \frac{40}{(1+0,05)^2} + 3 * \frac{1.040}{(1+0,05)^3}}{\frac{40}{(1+0,05)^1} + \frac{40}{(1+0,05)^2} + \frac{1.040}{(1+0,05)^3}} = \frac{2.805,83090379}{972,767519706}$$

$$D_{Mac} = 2,88437971761 \text{ Jahre}$$

Beispiel 2:

Nominalwert Anleihe = 1.000 EUR

Restlaufzeit = 2 Jahre

Zinszahlung = halbjährlich

Kupon = 4% p.a.

Rendite = 5%

$$D_{Mac} = \frac{\sum_{t>0}^T t * \frac{CF_t}{(1+i_{eff})^t}}{\sum_{t>0}^T \frac{CF_t}{(1+i_{eff})^t}}$$

$$D_{Mac} = \frac{0,5 * \frac{20}{(1+0,05)^{0,5}} + 1 * \frac{20}{(1+0,05)^1} + 1,5 * \frac{20}{(1+0,05)^{1,5}} + 2 * \frac{1.020}{(1+0,05)^2}}{\frac{20}{(1+0,05)^{0,5}} + \frac{20}{(1+0,05)^1} + \frac{20}{(1+0,05)^{1,5}} + \frac{1.020}{(1+0,05)^2}}$$

$$D_{Mac} = \frac{1.907,02961506}{982,324261352} = 1,94134430974 \text{ Jahre}$$

Dieses Ergebnis erhält man auch über die unten folgende Formel für D_{Mac} [Subperioden].

- Bei endfälligen Kuponanleihen mit konstanten Kupons und ohne bzw. mit gebrochener Kuponperiode sowie ohne unterjährliche Kuponzahlungen kann die Macaulay-Duration wie folgt als geschlossene Gleichung dargestellt werden:

$$D_{Mac}[\text{Jahre}] = \left(\frac{1+i_{eff}}{i_{eff}} - \frac{1+i_{eff} + (\dot{T} * (CF - i_{eff}))}{CF * ((1+i_{eff})^{\dot{T}} - 1) + i_{eff}} \right) - \frac{\dot{t}}{\dot{n}}$$

$\hat{T}$ = Restlaufzeit der Anleihe in ganzen Jahren; erforderlichenfalls auf ganze Jahre aufgerundet

$\dot{CF}$ = Fixer jährlicher Kuponsatz [%], Nominalzins in %

$\dot{t}$ = Anzahl der Tage vom Beginn der Kuponperiode bis zum Valutatag ($\equiv$ Kauf-tag)

$\dot{n}$ = Anzahl der Tage der Kuponperiode

- Bei endfälligen Kuponanleihen mit konstanten Kupons und ohne bzw. mit gebrochener Kuponperiode sowie mit unterjährigen Kuponzahlungen kann die Macaulay-Duration wie folgt als geschlossene Gleichung dargestellt werden:

$$D_{Mac}[\text{Subperioden}] = \left(\frac{1 + \hat{i}_m}{\hat{i}_m} - \frac{1 + \hat{i}_m + \left(\hat{T} * \left(\frac{\dot{CF}}{m} - \hat{i}_m \right) \right)}{\frac{\dot{CF}}{m} * ((1 + \hat{i}_m)^{\hat{T}} - 1) + \hat{i}_m} \right) - \frac{\dot{t}}{\dot{n}}$$

$$\hat{i}_m = \sqrt[m]{1 + i_{eff}} - 1$$

$$D_{Mac}[\text{Jahre}] = \frac{D_{Mac}[\text{Subperioden}]}{m}$$

$\hat{T}$ = Restlaufzeit der Anleihe in ganzen Subperioden (z. B. Halbjahre, Quartale, Monate); erforderlichenfalls auf ganze Subperioden aufgerundet

$\hat{i}_m$ = Die zur Jahresrendite i ($= i_{eff}$) konforme (äquivalente) unterjährige Rendite; konformer unterjähriger Periodenzinssatz

m = Zahl der Subperioden eines Jahres

- Die beiden geschlossenen Gleichungen für die Macaulay-Duration von endfälligen Kuponanleihen werden über einen aufwendigen Rechenweg aus der Kursformel für endfällige Kuponanleihen mit konstanten Kupons hergeleitet:

$$C'_0(i_{eff}) = \sum_{t>0}^T \frac{CF_t}{(1 + i_{eff})^t}$$

$$C'_0(i_{eff}) = \sum_{t>0}^T \frac{\overline{CF}}{(1 + i_{eff})^t} + \frac{R}{(1 + i_{eff})^T}$$

$$C'_0(i_{eff}) [\%] = \frac{C'_0(i_{eff})}{100}$$

$C'_0(i_{eff}) = C'_{0(dirty)}(i_{eff})$ = Kurs (Dirty Price) bzw. Barwert einer Anleihe mit einem Nominalwert von 100 GE im Zeitpunkt $t = 0$.

t (für $t > 0$) = Jeweils vergangene Zeit seit der Anfangsauszahlung zum Zeitpunkt des Anfalls eines Einzahlungsüberschusses [Jahre]

$T = \text{Restlaufzeit [Jahre]}$

$\overline{CF} = \text{Konstanter Cash Flow (= Einzahlungsüberschuss) in Periode } t > 0 \text{ pro } 100 \text{ GE aufgrund von jährlichen Kuponzahlungen}$

$R = \text{Rückzahlungsbetrag}$

$i_{eff} = \text{Effektivzinssatz, interner Zinsfuß der Anleihe (ISMA-Rendite), Jahresrendite, Marktzinssatz}$

Der erste Term ist der Barwert der Kuponzahlungen, der zweite Term ist der Barwert der Rückzahlung.

- **Kurs einer endfälligen Anleihe ohne gebrochene Kuponperiode und ohne unterjährige Kuponzahlungen**

Der erste Term der vorherigen Gleichung ist auch der Barwert einer n-mal nachschüssig zahlbaren Zeitrente $\overline{CF}$:

$$C'_{0,Kupons}(i_{eff}) = \overline{CF} * \frac{(1 + i_{eff})^T - 1}{(1 + i_{eff})^T * i}$$

$$C'_0(i_{eff}) = \frac{\overline{CF} * (1 + i_{eff})^T - 1}{(1 + i_{eff})^T * i} + \frac{R}{(1 + i_{eff})^T}$$

Für den Kurs einer endfälligen Anleihe ohne gebrochene Kuponperiode und ohne unterjährige Kuponzahlungen gilt somit:

$$C'_0(i_{eff}) = \frac{1}{(1 + i_{eff})^T} * \left(\overline{CF} * \frac{(1 + i_{eff})^T - 1}{i_{eff}} + R \right)$$

Für $R = 100$ kann wie folgt umgeformt werden:

$$C'_0(i_{eff}) = \frac{\overline{CF} * (1 + i_{eff})^T - 1}{(1 + i_{eff})^T * i} + \frac{100}{(1 + i_{eff})^T}$$

$$C'_0(i_{eff}) = \frac{\overline{CF}}{i_{eff}} - \frac{1}{(1 + i_{eff})^T} * \frac{\overline{CF}}{i_{eff}} + \frac{100}{(1 + i_{eff})^T}$$

$$C'_0(i_{eff}) = \frac{\overline{CF}}{i_{eff}} + \frac{1}{(1 + i_{eff})^T} * \left(100 - \frac{\overline{CF}}{i_{eff}} \right)$$

$$C'_0(i_{eff})[\%] = \frac{\overline{CF}}{i_{eff}} + \frac{1}{(1 + i_{eff})^T} * \left(1 - \frac{\overline{CF}}{i_{eff}} \right)$$

$\overline{CF} = \text{Fixer jährlicher Kuponsatz}[\%], \text{Nominalzins in } \%$

- **Kurs einer endfälligen Anleihe ohne gebrochene Kuponperiode und mit unterjährig Kuponzahlungen**

Ausgehend von

$$C'_0(i_{eff}) = \frac{1}{(1 + i_{eff})^T} * \left(\overline{CF} * \frac{(1 + i_{eff})^T - 1}{i_{eff}} + R \right)$$

ergibt sich für den Kurs einer endfälligen Anleihe ohne gebrochene Kuponperiode und mit unterjährig Kuponzahlungen:

$$C'_0(\hat{i}_m) = \frac{1}{(1 + \hat{i}_m)^{T*m}} * \left(\frac{\overline{CF}}{m} * \frac{(1 + \hat{i}_m)^{T*m} - 1}{\hat{i}_m} + R \right)$$

$$\hat{i}_m = \sqrt[m]{1 + i_{eff}} - 1$$

- **Kurs einer endfälligen Anleihe mit gebrochener Kuponperiode und ohne bzw. mit unterjährig Kuponzahlungen**

Der Kauf der Anleihe erfolgt zwischen zwei Zinsfälligkeitsterminen und wird bis zur Endfälligkeit gehalten. Die Anleihe hat dann eine Restlaufzeit von T ganzen Jahren zuzüglich einem anfänglichen gebrochenen Jahresanteil $\frac{\check{t}}{\check{n}}$.

Beim Kauf und Verkauf endfälliger Anleihen mit gebrochener Kuponperiode fallen Stückzinsen an. $C'_0(i_{eff})$ ist ein Dirty Price.

$$SZ = \frac{KS}{m} * \frac{\check{t}}{\check{n}} * NW$$

SZ = Stückzinsen

KS = jährlicher Kuponsatz

m = Kuponfrequenz pro Jahr (z.B. 2 bei halbjährlichen Kuponzahlungen)

$\check{t}$ = Anzahl der Tage vom letzten Zinstermin (einschließlich) bis zum Valutatag (ausschließlich); Anzahl der unterjährig Tage entsprechend der jeweils angewandten Zinsberechnungsmethode

$\check{n}$ = Anzahl der Tage in der Zins – bzw. Kuponperiode; Anzahl der Tage eines Jahres entsprechend der jeweils angewandten Zinsberechnungsmethode (360, 365, 365,25 oder 366 Tage; bei act./act. u. U. auch 362, 364 oder 368 Tage)

NW = Nominalwert der Anleihe

Die Formel

$$C'_0(i_{eff}) = \frac{1}{(1 + i_{eff})^T} * \left(\overline{CF} * \frac{(1 + i_{eff})^T - 1}{i_{eff}} + R \right)$$

erfährt bei Anwendung einer geometrischen (= zinseszinslichen) Verzinsung auf den gebrochenen Jahreszeitraum folgende Erweiterung:

$$C'_0(i_{eff}) = \frac{1}{(1 + i_{eff})^{T + \frac{t}{n}}} * \left(\overline{CF} * \frac{(1 + i_{eff})^{T+1} - 1}{i_{eff}} + R \right)$$

Für den Kurs einer endfälligen Anleihe mit gebrochener Kuponperiode und unterjährigen Kuponzahlungen gilt:

$$C'_0(\hat{i}_m) = \frac{1}{(1 + \hat{i}_m)^{(T + \frac{t}{n}) * m}} * \left(\frac{\overline{CF}}{m} * \frac{(1 + \hat{i}_m)^{\hat{T}} - 1}{\hat{i}_m} + R \right)$$

$$\hat{i}_m = \sqrt[m]{1 + i_{eff}} - 1$$

$\hat{T}$ = Restlaufzeit der Anleihe in ganzen Subperioden (z.B. Halbjahre, Quartale, Monate); erforderlichenfalls auf ganze Subperioden aufgerundet

- Die Ableitung der Kursfunktion für gebrochene Kuponperioden ohne unterjährige Zinszahlungen nach i_{eff} führt zu:

$$\frac{dC'_0(i_{eff})}{di_{eff}} = \left(\frac{1 + i_{eff}}{i_{eff}} - \frac{1 + i_{eff} + \left(\hat{T} * (\overline{CF} - i_{eff}) \right)}{\overline{CF} * ((1 + i_{eff})^{\hat{T}} - 1) + i_{eff}} \right) - \frac{t}{n} = D_{Mac} [Jahre]$$

Die Ableitung der Kursfunktion für gebrochene Kuponperioden mit unterjährigen Zinszahlungen nach $\hat{i}_m$ führt zu:

$$\frac{dC'_0(\hat{i}_m)}{d\hat{i}_m} = \left(\frac{1 + \hat{i}_m}{\hat{i}_m} - \frac{1 + \hat{i}_m + \left(\hat{T} * \left(\frac{\overline{CF}}{m} - \hat{i}_m \right) \right)}{\frac{\overline{CF}}{m} * ((1 + \hat{i}_m)^{\hat{T}} - 1) + \hat{i}_m} \right) - \frac{t}{n} = D_{Mac} [Subperioden]$$

Die Excel-DURATION-Funktion rechnet bei unterjährigen Kuponzahlungen nicht korrekt! Excel verwendet dann für die Durationsberechnung als Rendite die relative unterjährige Rendite $i_m = \frac{i_{eff}}{m}$ und nicht die zur Jahresrendite i_{eff} konforme (äquivalente) unterjährige Rendite $\hat{i}_m$.

Je größer die Duration, umso stärker wird der Kurs einer Anleihe von Zinsänderungen beeinflusst. Über die Duration lässt sich somit die Zinssensitivität einer Anleihe oder eines Portfolios abschätzen. Die Duration ist nie größer als die Laufzeit einer Anleihe und liegt im Regelfall (Ausnahme Zerobond) unterhalb der Restlaufzeit.

Allgemein gibt die Duration an, wie lange es durchschnittlich dauert, bis der Anleger das eingesetzte Kapital zurückerhalten hat. Als praktische Anlageregeln wird

formuliert, dass die Duration in etwa mit dem Planungshorizont eines Anlegers übereinstimmen soll. Somit kompensieren sich Wiederanlage- und Kursrisiken. Dieses wird auch **Immunisierung** genannt. Kommt es zu einer Zinsänderung, so bleibt der Barwert mehr oder weniger konstant.

Die Duration stellt jenen Zeitpunkt dar, bei dem völlige Immunisierung gegenüber dem Zinsänderungsrisiko im Sinne von Endwertschwankungen eintritt. Das Konzept baut auf dem Umstand auf, dass unvorhergesehene Zinsänderungen zwei gegenläufige Auswirkungen auf den Endwert eines festverzinslichen Wertpapiers (z.B. Anleihe) haben: So führt etwa ein Zinsanstieg zwar zu einem geringeren Barwert der Anleihe; wegen der Reinvestitionsprämisse werden die zukünftigen Zahlungen (Kupons) jedoch höher verzinst. Letztlich führt ein Zinsanstieg zu einem höheren Endwert. Umgekehrt verhält es sich bei einer Zinssenkung.

Jenen Zeitpunkt, bis zu dem der Marktwert der Anleihe bei gestiegenen Zinsen wegen der reinvestierten Kupons mindestens wieder den erwarteten Wert erreicht hat oder bis zu dem er bei gesunkenen Zinsen wegen der geringeren Diskontierung nicht den erwarteten Wert unterschritten hat, nennt man Duration.

Modellannahmen des Durationskonzepts:

- ⇒ Flache Zinsstrukturkurve: Durch diese vereinfachende Annahme laufzeitunabhängiger Zinsen können Zahlungen, die zu verschiedenen Zeitpunkten anfallen, mit einem einheitlichen Zinssatz abgezinst werden.
- ⇒ Einmalige Änderung des Marktzinsniveaus durch Parallelverschiebung der (flachen) Zinsstrukturkurve. Diese Änderung erfolgt unmittelbar nach Erwerb der Anleihe.
- ⇒ Wiederanlage der Kuponzahlungen erfolgt zum Marktzins i_{eff} .
- ⇒ Keine Transaktionskosten.
- ⇒ Keine Steuern.

Grundaussagen des Durationskonzepts:

- ⇒ Die Duration ist umso kleiner, je kürzer die Restlaufzeit ist – da das eingesetzte Kapital wegen der kürzeren Restlaufzeit schneller zurückfließt.
- ⇒ Die Duration ist umso kleiner, je höher der Marktzins liegt – da höhere Zinserträge aus der Wiederanlage der Kuponzinsen erzielt werden.
- ⇒ Die Duration ist umso kleiner, je höher der Anleihekupon ist – da das eingesetzte Kapital über die höheren Kuponzinsen schneller zurückfließt.
- ⇒ Die Duration eines Zerobonds ist gleich seiner Restlaufzeit – da es nur ein Rückflussereignis gibt.

Je höher die Duration einer Anleihe, desto stärker wird ihr Wert bei steigenden Zinsen fallen; denn wenn die Zinsen steigen, fällt der Wert von Anleihen und umgekehrt. Geht ein Anleger davon aus, dass die Zinsen während des Zeitraums, in dem eine Anleihe gehalten wird, fallen werden, dann wäre eine Anleihe mit einer längeren Duration attraktiv. Denn der Wert dieser Anleihe würde stärker steigen als der Wert vergleichbarer Anleihen mit kürzerer Duration.

Die Volatilität einer Anleihe ist in der Regel umso geringer, je kürzer ihre Duration ist. Beispielsweise würde eine Anleihe mit einer Duration von einem Jahr lediglich

1% an Wert verlieren, falls die Zinsen um 1% steigen. Eine Anleihe mit einer Duration von zehn Jahren würde 10% an Wert verlieren, falls die Zinsen um 1% steigen. Dagegen würden Anleihen mit einer längeren Duration bei einem Zinsrückgang von 1% stärker an Wert gewinnen als solche mit einer kürzeren Duration.

Risikoscheue Anleger oder solche, die sich über starke Schwankungen im Kapitalwert ihrer Anleihenbestände Sorgen machen, sollten eine Anleihenstrategie mit einer sehr kurzen Duration in Betracht ziehen. Anleger, die eher bereit sind, solche Fluktuationen in Kauf zu nehmen, oder die darauf vertrauen, dass die Zinsen fallen werden, sollten eine längere Duration erwägen.

Für variabel verzinsliche Wertpapiere kann keine Duration bestimmt werden. Bonitätsrisiken können nicht mit Hilfe des Durationskonzepts erfasst werden.

- Beispiel 1:

Berechne die Macaulay-Duration.

Laufzeit: 3 Jahre
 Zinszahlung: jährlich
 Kupon: 3% p.a.
 Rendite: 4%

Tabellarische Lösung:

Vergangene Jahre seit der Anfangsauszahlung	Zins- und Tilgungszahlungen	Barwert der Zins- und Tilgungszahlungen [EUR]	Gewichtungsfaktoren	Ermittlung der Duration [Jahre]
1	3,00	2,8846154	0,0296695	0,0296695
2	3,00	2,7736686	0,0285284	0,0570568
3	103,00	91,5666249	0,9418021	2,8254063
Summen:		97,2249089	1,0000000	2,9121326

Die Gewichtungsfaktoren erhält man, indem man jeden Barwert durch die Summe der Barwerte (= aktueller Kurs $C'_0(i_{eff}) = 97,2249089 \text{ GE}$) dividiert.

Lösung über offene Gleichung:

$$D_{Mac} = \frac{\sum_{t>0}^T t * \frac{CF_t}{(1+i_{eff})^t}}{\sum_{t>0}^T \frac{CF_t}{(1+i_{eff})^t}}$$

$$D_{Mac} = \frac{1 * \frac{3}{(1+0,04)^1} + 2 * \frac{3}{(1+0,04)^2} + 3 * \frac{103}{(1+0,04)^3}}{\frac{3}{(1+0,04)^1} + \frac{3}{(1+0,04)^2} + \frac{103}{(1+0,04)^3}} = \frac{283,1318275}{97,2249089}$$

$$D_{Mac} = 2,9121326 \text{ Jahre}$$

Lösung über geschlossene Gleichung:

$$D_{Mac}[\text{Jahre}] = \left(\frac{1 + i_{eff}}{i_{eff}} - \frac{1 + i_{eff} + (\dot{T} * (\dot{C}F - i_{eff}))}{\dot{C}F * ((1 + i_{eff})^{\dot{T}} - 1) + i_{eff}} \right) - \frac{\dot{t}}{\dot{n}}$$

$$D_{Mac} = \left(\frac{1 + 0,04}{0,04} - \frac{1 + 0,04 + (3 * (0,03 - 0,04))}{0,03 * ((1 + 0,04)^3 - 1) + 0,04} \right) - \frac{0}{365}$$

$$D_{Mac} = 2,9121326 \text{ Jahre}$$

- Beispiel 2:

Eine 5-jährige festverzinsliche Anleihe mit einem jährlichen Kupon von 4% weist eine Verfallrendite von 5% auf.

- a) Wie hoch ist der Kurs der 5-jährigen Anleihe, wenn der Valutatag auf den Kupontermin fällt?
- b) Wie hoch ist die Macaulay-Duration der 5-jährigen Anleihe, wenn der Valutatag auf den Kupontermin fällt?
- c) Die festverzinsliche 4%-Anleihe verfügt über eine Restlaufzeit von rd. 4,425 Jahren. Der Valutatag ist der 4. November 2016. Der Beginn des Zinslaufes am 8. April 2016 liegt 210 Tage zurück und die Zinsberechnungsmethode ist act./act. (ohne Berücksichtigung von Schaltjahren). Das Jahr besteht mithin durchgehend aus 365 Tagen. Welchen Kurs hat die Anleihe?
- d) Wie hoch ist im Fall c) die Macaulay-Duration?

a)

Lösung über offene Gleichung:

$$C'_0(i_{eff}) = \sum_{t>0}^T \frac{CF_t}{(1 + i_{eff})^t}$$

$$C'_0(i_{eff})[\%] = \frac{C'_0(i_{eff})}{100}$$

$$C'_0(i_{eff}) = \frac{4}{(1,05)^1} + \frac{4}{(1,05)^2} + \frac{4}{(1,05)^3} + \frac{4}{(1,05)^4} + \frac{104}{(1,05)^5}$$

$$C'_0(i_{eff}) = 95,6705233 \text{ GE}$$

$$C'_0(i_{eff})[\%] = \frac{95,6705233}{100}$$

$$C'_0(i_{eff})[\%] = 95,6705233\%$$

Lösung über geschlossene Gleichung:

$$C'_0(i_{eff}) = \frac{1}{(1 + i_{eff})^T} * \left(\overline{CF} * \frac{(1 + i_{eff})^T - 1}{i_{eff}} + R \right)$$

$$C'_0(i_{eff}) = \frac{1}{(1 + 0,05)^5} * \left(4 * \frac{(1 + 0,05)^5 - 1}{0,05} + 100 \right) = 95,6705233 \text{ GE}$$

Lösung mit Excel-KURS-Funktion:

Funktionsargumente

KURS			
Abrechnung	"08.04.2016"		= "08.04.2016"
Fälligkeit	"08.04.2021"		= "08.04.2021"
Zins	4%		= 0,04
Rendite	5%		= 0,05
Rückzahlung	100		= 100
Häufigkeit	1		= 1
Basis	1		= 1
			= 95,67052333

Kurs gem. Excel-KURS-Funktion (clean): 95,670523 GE (über Basis = 1)

Stückzinsen für 0 Tage: 0,00

Anfangsauszahlung (dirty): 95,670523 GE

$$C'_{0(dirty)}(i_{eff}) = 95,6705233 \text{ GE}$$

b)

Lösung über offene Gleichung:

$$D_{Mac} = \frac{\sum_{t>0}^T t * \frac{CF_t}{(1 + i_{eff})^t}}{\sum_{t>0}^T \frac{CF_t}{(1 + i_{eff})^t}}$$

$$D_{Mac} = \frac{1 * \frac{4}{(1,05)^1} + 2 * \frac{4}{(1,05)^2} + 3 * \frac{4}{(1,05)^3} + 4 * \frac{4}{(1,05)^4} + 5 * \frac{104}{(1,05)^5}}{\frac{4}{(1,05)^1} + \frac{4}{(1,05)^2} + \frac{4}{(1,05)^3} + \frac{4}{(1,05)^4} + \frac{104}{(1,05)^5}}$$

$$D_{Mac} = \frac{442,028657}{95,6705233}$$

$$D_{Mac} = 4,6203224 \text{ Jahre}$$

Lösung über geschlossene Gleichung:

$$D_{Mac}[\text{Jahre}] = \left(\frac{1 + i_{eff}}{i_{eff}} - \frac{1 + i_{eff} + (\ddot{T} * (CF - i_{eff}))}{CF * ((1 + i_{eff})^{\ddot{T}} - 1) + i_{eff}} \right) - \frac{\ddot{t}}{\ddot{n}}$$

$$D_{Mac} = \left(\frac{1 + 0,05}{0,05} - \frac{1 + 0,05 + (5 * (0,04 - 0,05))}{0,04 * ((1 + 0,05)^5 - 1) + 0,05} \right) - \frac{0}{365}$$

$$D_{Mac} = 4,6203224 \text{ Jahre}$$

c)

Lösung über offene Gleichung:

Wir der Kurs bei vorgegebener Rendite über die offene Gleichung berechnet, erhält man einen Dirty Price. Die Stückzinsen müssen bereits im Preis enthalten sein, da man andernfalls nicht auf die vorgegebene Rendite käme. Wenn in das Programm "*i_{eff} Professional*" der Dirty Price als Anfangsauszahlung eingesetzt wird, ist die Rendite = 5%. Wenn in "*i_{eff} Professional*" der Clean Price als Anfangsauszahlung eingesetzt wird, ist die Rendite größer als 5%.

$$C'_0(i_{eff}) = \sum_{t>0}^T \frac{CF_t}{(1 + i_{eff})^t}$$

$$C'_0(i_{eff})[\%] = \frac{C'_0(i_{eff})}{100}$$

$$C'_0(i_{eff}) = \frac{4}{(1,05)^{\frac{155}{365}}} + \frac{4}{(1,05)^{\frac{520}{365}}} + \frac{4}{(1,05)^{\frac{885}{365}}} + \frac{4}{(1,05)^{\frac{1.250}{365}}} + \frac{104}{(1,05)^{\frac{1.615}{365}}}$$

$$C'_0(i_{eff}) = 98,3941443 \text{ GE}$$

$$C'_0(i_{eff})[\%] = \frac{98,3941443}{100} = 98,3941443\%$$

$$C'_{0(dirty)}(i_{eff}) = 98,3941443 \text{ GE}$$

$$SZ = \frac{KS}{m} * \frac{\ddot{t}}{\ddot{n}} * NW$$

$$SZ = \frac{0,04}{1} * \frac{210}{365} * 100 = 2,3013699 \text{ GE}$$

$$C'_{0(clean)}(i_{eff}) = 98,3941443 - 2,3013699 = 96,0927744 \text{ GE}$$

Lösung über geschlossene Gleichung:

$$C'_0(i_{eff}) = \frac{1}{(1 + i_{eff})^{T + \frac{t}{n}}} * \left(\overline{CF} * \frac{(1 + i_{eff})^{T+1} - 1}{i_{eff}} + R \right)$$

$$C'_0(i_{eff}) = \frac{1}{(1 + 0,05)^{4 + \frac{155}{365}}} * \left(4 * \frac{(1 + 0,05)^{4+1} - 1}{0,05} + 100 \right) = 98,3941443 \text{ GE}$$

$$C'_{0(dirty)}(i_{eff}) = 98,3941443 \text{ GE}$$

$$SZ = 2,3013699 \text{ GE}$$

$$C'_{0(clean)}(i_{eff}) = 98,3941443 - 2,3013699 = 96,0927744 \text{ GE}$$

Lösung über Excel-KURS-Funktion

Bei der Excel-KURS-Funktion werden etwaige Stückzinsen automatisch vom Kurs abgezogen, so dass der Clean Price ausgewiesen wird. Würde man diesen Clean Price als Anfangsauszahlung verwenden, wäre die Rendite zu hoch bzw. man würde nicht auf das in der Excel-KURS-Funktion eingegebene "*Funktionsargument*" für die "*Rendite*" kommen.

Funktionsargumente

KURS				
Abrechnung	"04.11.2016"		=	"04.11.2016"
Fälligkeit	"08.04.2021"		=	"08.04.2021"
Zins	4%		=	0,04
Rendite	5%		=	0,05
Rückzahlung	100		=	100
Häufigkeit	1		=	1
Basis	1		=	1
				= 96,09277444

Kurs gem. Excel-KURS-Funktion (clean): 96,092774% (über Basis = 1)

Stückzinsen für 210 Tage: 2,301370 GE

Anfangsauszahlung (dirty): 98,394144 GE

$$C'_{0(clean)}(i_{eff}) = 96,092774 \text{ GE}$$

$$C'_{0(dirty)}(i_{eff}) = 96,092774 + 2,301370 = 98,394144 \text{ GE}$$

d)

Lösung über offene Gleichung:

$$D_{Mac} = \frac{\sum_{t=1}^n t * \frac{CF_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+i)^t}}$$

$$D_{Mac} = \frac{\frac{\frac{155}{365} * 4}{(1,05)^{\frac{155}{365}}} + \frac{\frac{520}{365} * 4}{(1,05)^{\frac{520}{365}}} + \frac{\frac{885}{365} * 4}{(1,05)^{\frac{885}{365}}} + \frac{\frac{1.250}{365} * 4}{(1,05)^{\frac{1.250}{365}}} + \frac{\frac{1.615}{365} * 104}{(1,05)^{\frac{1.615}{365}}}}{\frac{4}{(1,05)^{\frac{155}{365}}} + \frac{4}{(1,05)^{\frac{520}{365}}} + \frac{4}{(1,05)^{\frac{885}{365}}} + \frac{4}{(1,05)^{\frac{1.250}{365}}} + \frac{104}{(1,05)^{\frac{1.615}{365}}}}$$

$$D_{Mac} = \frac{398,0023342}{98,3941443}$$

$$D_{Mac} = 4,0449799 \text{ Jahre}$$

Lösung über geschlossene Gleichung:

$$D_{Mac}[\text{Jahre}] = \left(\frac{1 + i_{eff}}{i_{eff}} - \frac{1 + i_{eff} + (\ddot{T} * (\dot{C}F - i_{eff}))}{\dot{C}F * ((1 + i_{eff})^{\ddot{T}} - 1) + i_{eff}} \right) - \frac{\ddot{t}}{\ddot{n}}$$

$$D_{Mac} = \left(\frac{1 + 0,05}{0,05} - \frac{1 + 0,05 + (5 * (0,04 - 0,05))}{0,04 * ((1 + 0,05)^5 - 1) + 0,05} \right) - \frac{210}{365}$$

$$D_{Mac} = 4,0449799 \text{ Jahre}$$

- Beispiel 3:

Berechne die Macaulay-Duration.

Laufzeit:	4 Jahre
Zinszahlung:	halbjährlich
Kupon:	3% p.a.
Rendite:	5%
Zinsberechnungsmethode:	30/360

Lösung über geschlossene Gleichung:

$$D_{Mac}[Subperioden] = \left(\frac{1 + \hat{i}_m}{\hat{i}_m} - \frac{1 + \hat{i}_m + \left(\hat{T} * \left(\frac{\dot{CF}}{m} - \hat{i}_m \right) \right)}{\frac{\dot{CF}}{m} * ((1 + \hat{i}_m)^{\hat{T}} - 1) + \hat{i}_m} \right) - \frac{\hat{t}}{\hat{n}}$$

$$\hat{i}_m = \sqrt[m]{1 + i_{eff}} - 1$$

$$D_{Mac}[Jahre] = \frac{D_{Mac}[Subperioden]}{m}$$

$$\hat{i}_m = \sqrt[2]{1 + 0,05} - 1 = 2,469507659\%$$

$$D_{Mac}[Subperioden] = \left(\frac{1 + 0,02469507659}{0,02469507659} - \frac{1 + 0,02469507659 + \left(8 * \left(\frac{0,03}{2} - 0,02469507659 \right) \right)}{\frac{0,03}{2} * ((1 + 0,02469507659)^8 - 1) + 0,02469507659} \right) - \frac{0}{180}$$

$$D_{Mac}[Subperioden] = 7,5800644 \text{ Halbjahre}$$

$$D_{Mac}[Jahre] = \frac{7,5800644}{2} = 3,7900322 \text{ Jahre}$$

Lösung mit Excel-DURATION-Funktion:

Funktionsargumente

DURATION			
Abrechnung	"01.01.2000"		= "01.01.2000"
Fälligkeit	"01.01.2004"		= "01.01.2004"
Nominalzins	3%		= 0,03
Rendite	5%		= 0,05
Häufigkeit	2		= 2
Basis	0		= 0
			= 3,789741345

$$D_{Mac}[Subperioden] = \left(\frac{1 + 0,025}{0,025} - \frac{1 + 0,025 + \left(8 * \left(\frac{0,03}{2} - 0,025 \right) \right)}{\frac{0,03}{2} * ((1 + 0,025)^8 - 1) + 0,025} \right) - \frac{0}{180}$$

$$D_{Mac} [Subperioden] = 7,579482 \text{ Halbjahre}$$

$$D_{Mac} [Jahre] = \frac{7,579482}{2} = 3,789741 \text{ Jahre}$$

Dieser Rechenweg ist allerdings aufgrund der Verwendung der relativen unterjährige Rendite $i_m = \frac{i_{eff}}{m}$ anstatt der zur Jahresrendite konformen (äquivalenten) unterjährigen Rendite $\hat{i}_m$ nicht korrekt.

- Beispiel 4:

Berechne die Macaulay-Duration.

Laufzeit: 8 Jahre, 94 Tage
 Zinszahlung: halbjährlich
 Kupon: 5% p.a.
 Rendite: 6%
 Zinsberechnungsmethode: 30/360

Lösung über geschlossene Gleichung:

$$D_{Mac} [Subperioden] = \left(\frac{1 + \hat{i}_m}{\hat{i}_m} - \frac{1 + \hat{i}_m + \left(\hat{T} * \left(\frac{\dot{CF}}{m} - \hat{i}_m \right) \right)}{\frac{\dot{CF}}{m} * ((1 + \hat{i}_m)^{\hat{T}} - 1) + \hat{i}_m} \right) - \frac{\hat{t}}{\hat{n}}$$

$$\hat{i}_m = \sqrt[m]{1 + i_{eff}} - 1$$

$$D_{Mac} [Jahre] = \frac{D_{Mac} [Subperioden]}{m}$$

$$\hat{i}_m = \sqrt[2]{1 + 0,06} - 1 = 2,956301409\%$$

$$D_{Mac} [Subperioden] = \left(\frac{1 + 0,02956301409}{0,02956301409} - \frac{1 + 0,02956301409 + \left(17 * \left(\frac{0,05}{2} - 0,02956301409 \right) \right)}{\frac{0,05}{2} * ((1 + 0,02956301409)^{17} - 1) + 0,02956301409} \right) - \frac{86}{180}$$

$$D_{Mac} [Subperioden] = 13,4653933 \text{ Halbjahre}$$

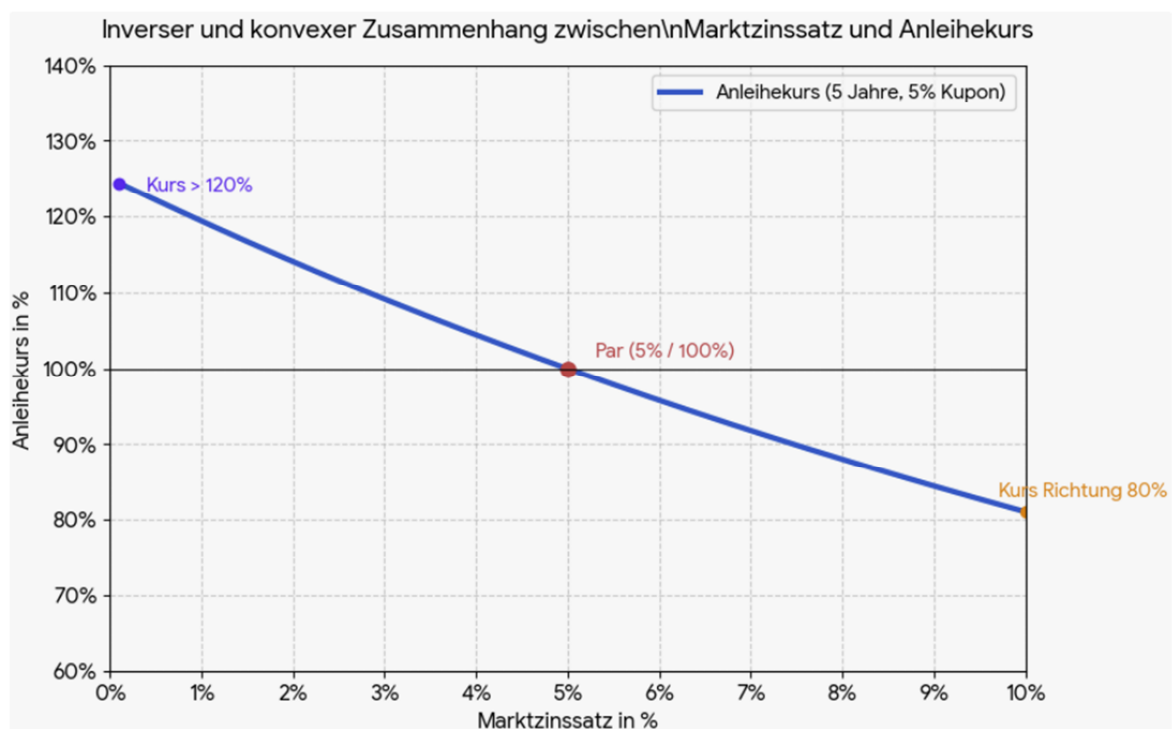
$$D_{Mac} [Jahre] = \frac{13,4653933}{2} = 6,7326967 \text{ Jahre}$$

3. Wertänderung einer Anleihe in Abhängigkeit von der Zinsänderung

- Steigen die Zinsen, so fallen die Kurse der Anleihen, fallen die Zinsen, so steigen die Kurse der Anleihen. In einem von steigenden Zinsen geprägten Umfeld schichten Anleger in der Regel in Anleihen kürzerer Laufzeit oder mit höherem Kupon um, um das Zinsrisiko (d.h. die Duration) in ihren Portfolios zu verringern.

Je niedriger die Duration, umso geringer ist das Zinsänderungsrisiko. Eine niedrige Duration steht für einen schnellen Rückfluss des eingesetzten Kapitals.

- Graphische Darstellung des funktionalen Zusammenhangs zwischen Marktzinssatz und Anleihekurs



- Die Macaulay-Duration D_{Mac} ist das mit dem jeweiligen Barwert gewichtete arithmetische Mittel der Zahlungszeitpunkte einer Anleihe. Mathematisch handelt es sich hierbei allerdings um eine Marktzinsfaktorelastizität $\varepsilon_{C'_0(i_{eff}), 1+i_{eff}} = D_{Mac}$ des Anleihepreises $C'_0(i_{eff})$ in Bezug auf Änderungen des Marktzinsfaktors $1 + i_{eff}$:

$$D_{Mac} = \varepsilon(1 + i_{eff}) = - \frac{\frac{dC'_0(i_{eff})}{C'_0(i_{eff})}}{\frac{d(1 + i_{eff})}{1 + i_{eff}}} = - \frac{dC'_0(i_{eff})}{d(1 + i_{eff})} * \frac{1 + i_{eff}}{C'_0(i_{eff})}$$

- Für den Barwert bzw. Kurs (Dirty Price) einer Anleihe im Zeitpunkt t gilt:

$$C_0'(i_{eff}) = \sum_{t>0}^T \frac{CF_t}{(1 + i_{eff})^t} = \sum_{t>0}^T CF_t * (1 + i_{eff})^{-t}$$

Für die Funktion $C_0'(i_{eff})$ ist die erste Ableitung nach dem Marktzinsfaktor $1 + i_{eff}$ zu bestimmen.

- Hintergründe aus der Differentialrechnung

Die Ableitung einer beliebigen Funktion an einer Stelle x_0 ist definiert als die Steigung der Tangente im Punkt $(x_0 | f(x_0))$ des Graphen von f . Ist die gegebene Kurve der Graph einer reellen Funktion f , dann ist die Tangente t im Punkt $(x_0 | f(x_0))$ die Gerade, die dort die gleiche Steigung wie die Kurve hat. Die Steigung der Tangente ist also gleich der ersten Ableitung von f an der Stelle x_0 .

Die **erste Ableitung** $f'(x)$ sagt etwas über die Steigung der ursprünglichen Funktion $f(x)$.

Dort wo $f'(x)$ größer ist als 0, ist $f(x)$ steigend. In einem Bereich, in dem die 1. Ableitung größer als 0 ist ($f'(x) > 0$), steigt somit der Graph.

Dort wo $f'(x)$ kleiner ist als 0, ist $f(x)$ fallend. In einem Bereich, in dem die 1. Ableitung kleiner Null ist ($f'(x) < 0$), fällt somit der Graph.

Dort, wo $f'(x)$ gleich 0 ist ($f'(x) = 0$), liegt eine waagrechte Tangente vor.

Beispiel:

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

Setzt man für x die 3 ein, dann ergibt sich für $f'(x)$ die Zahl 6. D.h.: Verändert man in der Nähe von $x = 3$ den x -Wert geringfügig, dann ändert sich der zugehörige y -Wert ($= f(x)$) ungefähr 6-mal so stark.

Die **zweite Ableitung** $f''(x)$ sagt etwas über die Krümmung der ursprünglichen Funktion $f(x)$.

Dort wo die zweite Ableitung negative Werte hat, ist die ursprüngliche Funktion rechtsgekrümmt (konkav); die Kurve dreht sich im Uhrzeigersinn.

Dort wo die zweite Ableitung positive Werte hat, ist die ursprüngliche Funktion linksgekrümmt (konvex); die Kurve dreht sich gegen den Uhrzeigersinn.

Dort wo die zweite Ableitung den Wert 0 hat, kann die ursprüngliche Funktion einen Wende- oder Sattelpunkt haben oder linear (gerade) verlaufen.

Funktion	Erste Ableitung	Zweite Ableitung
x^n	$n * x^{n-1}$	$n * (n - 1) * x^{n-2}$
x^2	$2 * x$	2
x^3	$3 * x^2$	$6 * x$
x^4	$4 * x^3$	$12 * x^2$
$x^{\frac{5}{2}}$	$\frac{5}{2} * x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{15}{4} * x^{\frac{1}{2}}$
$x^{-\frac{5}{2}}$	$-\frac{5}{2} * x^{-\frac{7}{2}}$	$-\frac{35}{4} * x^{-\frac{9}{2}}$
$8 + x^1$	-1	0
$8 - x^4$	$-4 * x^3$	$-12 * x^2$
$9 - x^{-5}$	$5 * x^{-6}$	$-30 * x^{-7}$

Für die Ableitung verketteter Funktionen gibt die Kettenregel:

$$f(x) = g(h(x))$$

$$f'(x) = g'(h(x)) * h'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = 6 * (1 + x^2)^3$$

$$f'(x) = 18 * (1 + x^2)^2 * 2x = 36x * (1 + x^2)^2$$

Bei Ableitungen wird ein d benutzt, wenn nur eine Variable vorhanden ist.

Beispiel:

$$y = f(x)$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Bei Ableitungen wird ein ∂ benutzt, wenn mehrere Variablen vorhanden sind. Man spricht hier von einer partiellen Ableitung. In der Differentialrechnung ist eine partielle Ableitung die Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten nach einem dieser Argumente. Die Werte der übrigen Argumente werden konstant gehalten.

Beispiel:

$$y = f(x, z)$$

$$f'(x) = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$f''(x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Δ steht für eine beliebige Änderung, d steht für eine sehr kleine Änderung, ∂ steht ebenfalls für eine sehr kleine Änderung und wird bei Funktionen mit mehreren Variablen verwendet.

- Hintergründe zur Elastizität

Die Elastizität ε einer Funktion gibt das Verhältnis der relativen Veränderung (= prozentuale Veränderung) der Funktionswerte y zu der relativen Veränderung der Variablen x an:

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}}$$

Wenn man diesen Doppelbruch umformt und y als Funktion $f(x)$ schreibt, erhält man folgende Form mit der Ableitung $f'(x)$, die die Punktelastizität angibt:

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{\frac{df(x)}{f(x)}}{\frac{dx}{x}} = \frac{df(x)}{dx} * \frac{x}{f(x)} = f'(x) * \frac{x}{f(x)}$$

bzw.

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{dy}{y} * \frac{x}{dx} = \frac{dy}{dx} * \frac{x}{y}$$

Die Elastizität beantwortet folgende Frage: Um wie viel Prozent verändert sich eine Variable y als Reaktion auf die 1%ige Änderung der anderen Variable x . Man nennt diese relative Änderung die Elastizität von y bezüglich x oder die x -Elastizität von y .

Beispiel:

Der Marktzinssatz ändert sich von 6,9% auf 7,3%. Der Kurs einer Aktie sinkt daraufhin von 12.600 GE auf 11.450 GE.

- Berechne und interpretiere die Marktzinselastizität des Aktienkurses.
- Der Marktzins fällt in einer späteren Periode von 6,1% auf 4,9%. Wie reagiert der Aktienkurs wenn die unter a) berechnete Zinselastizität fortbesteht?

a)

$$\varepsilon_{C_0'(i_{eff}), i_{eff}} = - \frac{\frac{dC_0'(i_{eff})}{C_0'(i_{eff})}}{\frac{di_{eff}}{i_{eff}}}$$

$$\varepsilon_{C_0'(i_{eff}), i_{eff}} = - \frac{\frac{1.150}{12.600}}{\frac{0,004}{0,069}} = -1,5744047619$$

Steigt der Marktzins um 1%, sinkt der Aktienkurs um 1,5744047619%

b)

$$6,1\% \triangleq 100\%$$

$$1,2\% \triangleq g$$

$$g = 19,6721311475\%$$

Der Marktzins sinkt um 1,2 Prozentpunkte bzw. um 19,6721311475%.

$$1\% \triangleq 1,5744047619\%$$

$$19,6721311475\% \triangleq h$$

$$h = \frac{19,6721311475\% * 1,5744047619\%}{1\%} = 30,9718969554\%$$

Bei einer Zinssenkung um 1,2 Prozentpunkte steigt der Aktienkurs um 30,4723502303%

- Ableitung der Kursfunktion nach dem Marktzinsfaktor $1 + i_{eff}$

Eine Ableitung nach $1 + i_{eff}$ anstatt nach i_{eff} ist die Ableitung einer verketteten Funktion. Änderungen des Marktzinsfaktors $1 + i_{eff}$ sind identisch mit Änderungen des Marktzinssatzes.

$$C'_0(i_{eff}) = \sum_{t>0}^T CF_t * (1 + i_{eff})^{-t}$$

$$\frac{dC'_0(i_{eff})}{d(1 + i_{eff})} = \sum_{t>0}^T CF_t * (-t) * (1 + i_{eff})^{-t-1}$$

$$\frac{dC'_0(i_{eff})}{d(1 + i_{eff})} = - \sum_{t>0}^T \frac{t * CF_t}{(1 + i_{eff})^{(t+1)}} = - \frac{1}{1 + i_{eff}} * \sum_{t>0}^T \frac{t * CF_t}{(1 + i_{eff})^t} \mid * \frac{1 + i_{eff}}{C'_0(i_{eff})}$$

$$\frac{dC'_0(i_{eff})}{d(1 + i_{eff})} * \frac{1 + i_{eff}}{C'_0(i_{eff})} = - \frac{1}{1 + i_{eff}} * \sum_{t>0}^T \frac{t * CF_t}{(1 + i_{eff})^t} * \frac{1 + i_{eff}}{C'_0(i_{eff})}$$

$$\frac{dC'_0(i_{eff})}{d(1 + i_{eff})} * \frac{1 + i_{eff}}{C'_0(i_{eff})} = - \sum_{t>0}^T \frac{t * CF_t}{(1 + i_{eff})^t} * \frac{1}{C'_0(i_{eff})}$$

$$\frac{\frac{dC'_0(i_{eff})}{C'_0(i_{eff})}}{\frac{d(1 + i_{eff})}{1 + i_{eff}}} = - \frac{\sum_{t>0}^T \frac{t * CF_t}{(1 + i_{eff})^t}}{C'_0(i_{eff})}$$

$$\frac{\frac{dC'_0(i_{eff})}{C'_0(i_{eff})}}{\frac{d(1+i_{eff})}{1+i_{eff}}} = -\frac{\sum_{t>0}^T \frac{t * CF_t}{(1+i_{eff})^t}}{\sum_{t>0}^T \frac{CF_t}{(1+i_{eff})^t}} = -D_{Mac}$$

$$\frac{\frac{dC'_0(i_{eff})}{C'_0(i_{eff})}}{\frac{d(1+i_{eff})}{1+i_{eff}}} = \varepsilon(1+i_{eff}) = -D_{Mac}$$

Somit erhält man die Elastizitätsgleichung:

$$D_{Mac} = -\varepsilon_{C'_0(i_{eff}), 1+i_{eff}}$$

Mathematisch ist die Macaulay-Duration D_{Mac} somit mithin ein Maß für die Elastizität des Anleihekurses $C'_0(i_{eff})$ in Bezug auf Änderungen des Marktzinsfaktors $1+i_{eff}$.

Interpretation der Elastizität $\varepsilon_{C'_0(i_{eff}), 1+i_{eff}}$ des Anleihepreises $C'_0(i_{eff})$ in Bezug auf Änderungen des Marktzinsfaktors $1+i_{eff}$:

Steigt der Marktzinsfaktor $1+i_{eff}$ um 1%, so sinkt der Anleihekurs um x%. Im Zähler der Elastizitätsgleichung gibt $d(1+i_{eff})$ die Marktzinsfaktoränderung und $1+i_{eff}$ den bisherigen Marktzinsfaktor an. Im Nenner gibt $dC'_0(i_{eff})$ die Anleihekursänderung und $C'_0(i_{eff})$ den bisherigen Anleihekurs an. Dividiert man die relative Anleihekursänderung (Zähler) durch die relative Marktzinsfaktoränderung (Nenner), erhält man die prozentuale Anleihekursänderung infolge einer 1%igen Marktzinsfaktoränderung.

Die Macaulay-Duration wird nicht als Prozentwert bzw. als relative Zahl geschrieben, sondern wegen des parallelen Ausweises einer Jahreszahl als absolute Zahl.

Weitere Umformung führt zu:

$$\frac{dC'_0(i_{eff})}{C'_0(i_{eff})} = -D_{Mac} * \frac{d(1+i_{eff})}{1+i_{eff}}$$

Daraus folgt: Die Zinssensitivität einer Anleihe ist umso höher, je größer die Macaulay-Duration ist. Je größer die Macaulay-Duration, umso stärker ist die prozentuale Anleihekursänderung, die durch eine Marktzinsänderung verursacht wird.

Aus vorherigen Gleichungen folgt ferner:

$$\frac{dC'_0(i_{eff})}{d(1+i_{eff})} = -D_{Mac} * \frac{C'_0(i_{eff})}{1+i_{eff}}$$

Vorgenannter Ausdruck stellt die approximative (= angenäherte) relative Wertänderung der Anleihe bei (kleiner) Marktzinsfaktoränderung dar.

- Näherungsformel zur Einschätzung der relativen Anleihekursänderung [%]

$$\frac{\Delta C'_0(i_{eff})}{C'_0(i_{eff})} = -\frac{D_{Mac}}{1+i_{eff}} * \Delta(1+i_{eff}) = -\frac{D_{Mac}}{1+i_{eff}} * \Delta i_{eff}$$

$\frac{\Delta C'_0(i_{eff})}{C'_0(i_{eff})}$ gibt an, um wieviel % sich der Anleihekurswert in $t = 0$ bei einer bestimmten Marktzinsfaktoränderung ändert.

- Näherungsformel zur Einschätzung der absoluten Anleihekursänderung [EUR, USD etc.]:

$$\Delta C'_0(i_{eff}) = -\frac{D_{Mac}}{1+i_{eff}} * C'_0(i_{eff}) * \Delta(1+i_{eff}) = -\frac{D_{Mac}}{1+i_{eff}} * C'_0(i_{eff}) * \Delta i_{eff}$$

$\Delta C'_0(i_{eff})$ gibt an, um welchen absoluten Geldbetrag sich der Anleihekurswert in $t = 0$ bei einer bestimmten Marktzinsfaktoränderung ändert.

- Näherungsformel zur Einschätzung des neuen Anleihekurswertes [EUR, USD etc.] nach einer Marktzinsfaktoränderung:

$$C'_1(i_{eff}) = C'_0(i_{eff}) + \Delta C'_0(i_{eff})$$

- Beispiel 1:

Macaulay-Duration = 6 Jahre

Rendite = 8%

Die Rendite steigt um 10% von 8% auf 8,8%.

Berechne die Wertänderung der Anleihe.

$$\frac{\Delta C'_0(i_{eff})}{C'_0(i_{eff})} = -\frac{D_{Mac}}{1+i_{eff}} * \Delta(1+i_{eff})$$

$$\frac{\Delta C'_0(i_{eff})}{C'_0(i_{eff})} = -\frac{6}{1+0,08} * 0,008 = -4,4\%$$

Der Kurs der Anleihe sinkt um 4,4%.

- Beispiel 2:

Gegeben sei eine USD-Staatsanleihe mit einer Duration (D_{Mac}) von 4,5 Jahren und einer Rendite (i_{eff}) von 2,75%. Wie hoch wäre der Kursverlust dieser Anleihe, wenn das Zinsniveau in den USA um 1 Prozentpunkt (Δi_{eff}) steigen würde?

$$\frac{\Delta C'_0(i_{eff})}{C'_0(i_{eff})} = -\frac{D_{Mac}}{1 + i_{eff}} * \Delta(1 + i_{eff})$$

$$\frac{\Delta C'_0(i_{eff})}{C'_0(i_{eff})} = -\frac{4,5}{1 + 0,0275} * 0,01 = -4,379562043$$

Der Kurs der Anleihe sinkt um 4,379562043%.

- Beispiel 3:

Ein Anleger besitzt je einen Zerobond I und II mit einem Kurswert von 2.000.000 GE und mit einer Restlaufzeit von 2 bzw. 6 Jahren. Die Zinskurve ist flach bei $i_{eff} = 4\%$. Wie verändert sich der Wert dieser Anleihen, wenn die Zinsen auf $i_{eff} = 4,2\%$ steigen bzw. auf $i_{eff} = 3,8\%$ fallen? Welche Näherung liefert der Durationsansatz?

➤ **Genaue Wertänderungen:**

Für den Kurs eines Zerobonds gilt $C'_0(i_{eff}) = \frac{R}{(1+i_{eff})^T}$

$$2.000.000 = \frac{R}{(1 + 0,04)^2} \Rightarrow R = 2.163.200$$

$$x = \frac{R}{(1 + 0,042)^2} = \frac{2.163.200}{(1 + 0,042)^2} = 1.992.329,82489749$$

$$\Delta C'_0(i_{eff}; Ia) = 1.992.329,8249 - 2.000.000 = -7.670,17510251 \text{ GE}$$

Alternativ: Über abgezinsten Endwertvergleich

$$(2.000.000 * 1,04^2 - 2.000.000 * 1,042^2) * 1,042^{-2} = -7.670,17510251 \text{ GE}$$

$$2.000.000 = \frac{R}{(1 + 0,04)^2} \Rightarrow R = 2.163.200$$

$$x = \frac{R}{(1 + 0,038)^2} = \frac{2.163.200}{(1 + 0,038)^2} = 2.007.714,55407$$

$$\Delta C'_0(i_{eff}; Ib) = 2.007.714,55407 - 2.000.000 = +7.714,5540742 \text{ GE}$$

$$2.000.000 = \frac{R}{(1 + 0,04)^6} \Rightarrow R = 2.530.638,03699$$

$$x = \frac{R}{(1 + 0,042)^6} = \frac{2.530.638,03699}{(1 + 0,042)^6} = 1.977.077,60926$$

$$\Delta C'_0(i_{eff}; IIa) = 1.977.077,60926 - 2.000.000 = -\mathbf{22.922,3907407 \text{ GE}}$$

$$2.000.000 = \frac{R}{(1 + 0,04)^6} \Rightarrow R = 2.530.638,03699$$

$$x = \frac{R}{(1 + 0,038)^6} = \frac{2.530.638,03699}{(1 + 0,038)^6} = 2.023.233,04852$$

$$\Delta C'_0(i_{eff}; IIb) = 2.023.233,04852 - 2.000.000 = +\mathbf{23.233,04852 \text{ GE}}$$

➤ **Näherungsweise Wertänderungen:**

$$D_{Mac}(I) = 2 \text{ Jahre}$$

$$D_{Mac}(II) = 6 \text{ Jahre}$$

$$\Delta C'_0(i_{eff}) = -\frac{D_{Mac}}{1 + i_{eff}} * C'_0(i_{eff}) * \Delta(1 + i_{eff})$$

$$\Delta C'_0(i_{eff}; Ia) = -\frac{2}{1 + 0,04} * 2.000.000 * +0,002 = -\mathbf{7.692,30769231 \text{ GE}}$$

$$\Delta C'_0(i_{eff}; Ia) = -\frac{2}{1 + 0,04} * 2.000.000 * -0,002 = +\mathbf{7692,30769231 \text{ GE}}$$

$$\Delta C'_0(i_{eff}; IIa) = -\frac{6}{1 + 0,04} * 2.000.000 * +0,002 = -\mathbf{23.076,9230769 \text{ GE}}$$

$$\Delta C'_0(i_{eff}; IIb) = -\frac{6}{1 + 0,04} * 2.000.000 * -0,002 = +\mathbf{23.076,9230769 \text{ GE}}$$