

Dipl.-Kfm. Ansgar Ostermann

Finanzmathematik



Vorwort

Seit vielen Jahren bin ich im Handel mit High Yield Bonds aktiv, dem ohne Anwendung finanzmathematischer Methoden ein wesentliches Fundament fehlen würde. Es entstand daher die Idee, wichtig erscheinende Elemente der Finanzmathematik aus der Perspektive eines Praktikers in einem Skript zusammenzufassen.

Das vorliegende Skript führt in die Grundlagen der Finanzmathematik ein und versucht insbesondere ein Verständnis dafür zu schaffen, in welchen Fallkonstellationen welche Formeln anzuwenden sind.

Das Skript kann auch als begleitendes Handbuch zu der von mir entwickelten Excel-Anwendung *ieff Professional* verwendet werden. Zahlreiche in diesem Skript behandelte Aufgaben werden mit Unterstützung dieser Anwendung gelöst.

Ich freue mich über Anregungen, Kritik, Fehlerhinweise und Verbesserungsvorschläge, die Sie an folgende E-Mail-Adresse richten können:

ieff-professional@freenet.de

Berlin, im Januar 2026
Ansgar Ostermann

Gliederung

I. Zinsrechnung

1. Prozentrechnung
2. Jährliche Verzinsung
 - 2.1. Grundlagen
 - 2.2. Jährliche einfache Verzinsung bzw. lineare Verzinsung (ohne Zinseszinsen)
 - 2.3. Jährliche Verzinsung mit Zinseszinsen bzw. exponentielle Verzinsung
 - 2.4. Hintergründe zur linearen und exponentiellen Verzinsung
 - 2.5. Einzelheiten zur Zinseszinsrechnung
3. Unterjährliche Verzinsung
 - 3.1. Unterjährliche einfache Verzinsung
 - 3.2. Unterjährliche Verzinsung mit Zinseszinsen
 - 3.3. Nomineller vs. relativer Zinssatz
 - 3.4. Effektiver bzw. konformer Zinssatz
 - 3.5. Umrechnung effektiver Jahreszinssatz in konformen Subperiodenzinssatz
 - 3.6. Umrechnung konformer Subperiodenzinssatz in konformen Jahreszinssatz
 - 3.7. Verdeutlichung der Zusammenhänge
 - 3.8. Besondere Laufzeiten
 - 3.8.1. Verzinsung bei Laufzeiten, die nicht ganzzahligen Vielfachen der Zinsperiode entsprechen
 - 3.8.1.1. Einfache Verzinsung
 - 3.8.1.2. Verzinsung mit Zinseszinsen, gemischte Verzinsung
 - 3.8.2. Stetige Verzinsung

II. Investitionsrechnung

1. Kapitalwertmethode (Net Present Value, NPV)
2. Endwertmethode (Future Value)
3. Interne Zinsfußmethode (Internal Rate of Return, IRR)
4. Modifizierte interne Zinsfußmethode (Modified Internal Rate of Return, MIRR)
5. Differenzinvestitionen
6. Kapitalerwartungswert
 - 6.1. Kapitalerwartungswert $EW(C_{0j})$ als alleiniges Entscheidungskriterium
 - 6.2. Kapitalerwartungswert $EW(C_{0j})\sigma$ und Streuung σ der Kapitalwerte als kombiniertes Entscheidungskriterium
7. Leverage-Effekt

III. Rentenrechnung

1. Jährliche Rentenzahlungen bei jährlich-nachschüssigen Zinseszinsen
 - 1.1. Nachschüssige Rentenzahlungen
 - 1.2. Vorschüssige Rentenzahlungen
 - 1.3. Endbetrag eines Grundbetrages bei regelmäßigen Einzahlungen und Abhebungen von r [in EUR]
2. Jährliche Rentenzahlungen bei unterjährlich-nachschüssigen Zinseszinsen
3. Unterjährliche Rentenzahlungen
 - 3.1. Nachschüssige unterjährliche Rentenzahlungen bei jährlich-nachschüssiger Verzinsung
 - 3.2. Vorschüssige unterjährliche Rentenzahlungen bei jährlich-nachschüssiger Verzinsung
 - 3.3. Unterjährliche Renten bei unterjährlich-nachschüssigen Zinsen mit identischer Länge von Zins- und Rentenperiode
 - 3.4. Unterjährliche Renten bei unterjährlich-nachschüssigen Zinsen, wenn die Rentenperiode kürzer als die Zinsperiode ist
 - 3.5. Unterjährliche Renten bei unterjährlich-nachschüssigen Zinsen, wenn die Rentenperiode länger als die Zinsperiode ist
4. Ewige Rente
5. Anwendung der Rentenrechnung bei Investitions- und Finanzierungsentscheidungen: die Annuitätenmethode

IV. Tilgungsrechnung

1. Grundlagen
2. Tilgung durch gleichbleibende Tilgungsraten (Ratentilgung)
 - 2.1. Jährliche Ratentilgung
 - 2.2. Unterjährliche Ratentilgung
 - 2.2.1. Vorbemerkungen
 - 2.2.2. Gleiche Anzahl an Tilgungs- und Zinsperioden
 - 2.2.3. Mehr Tilgungs- als Zinsperioden
 - 2.2.4. Mehr Zins- als Tilgungsperioden
3. Tilgung durch gleichbleibende Annuitäten (Annuitätentilgung)
 - 3.1. Jährliche Annuitätentilgung
 - 3.2. Unterjährliche Annuitätentilgung
 - 3.2.1. Vorbemerkungen
 - 3.2.2. Gleiche Anzahl an Tilgungs- und Zinsperioden
 - 3.2.3. Mehr Tilgungs- als Zinsperioden
 - 3.2.4. Mehr Zins- als Tilgungsperioden
 - 3.3. Tilgung mit Prozentannuitäten
4. Tilgungsgewichteter Zinssatz

V. Berechnung von Kurs und Effektivverzinsung

1. Der Zusammenhang zwischen Kurs und Effektivverzinsung
2. Terminkonventionen
3. Kurs und Effektivverzinsung einer Zinsschuld
 - 3.1. Jährliche Zinsschuld ohne Aufgeld
 - 3.2. Jährliche Zinsschuld mit Aufgeld
 - 3.3. Unterjährliche Zinsschuld
 - 3.4. Besondere Laufzeiten
4. Effektivverzinsung nach ISMA
5. Effektivverzinsung nach Moosmüller
6. Effektivverzinsung ohne unterjährigen Zinseszinsseffekt

VI. Pensionsrückstellungsrechnung

I. Zinsrechnung

1. Prozentrechnung

- **Prozent**

$$x\% \text{ von } A = \frac{x * A}{100}$$

Beispiel 1:

Herstellerpreis = 120 EUR

Großhandelspreis = 134 EUR

Großhandelsanteil bei Verkauf an Einzelhandel?

134 EUR $\triangleq$ 100%

14 EUR $\triangleq$ 10,447761%

Beispiel 2:

Gewicht der Rohstoffe = 120 kg

Materialverlust = 14 kg

Materialverlust vom Fertigprodukt aus betrachtet?

106 kg $\triangleq$ 14 kg

100 kg $\triangleq$ 13,207547 kg

Vom Fertigprodukt aus betrachtet beträgt der Materialverlust 13,207547%

- **Prozentuales Wachstum**

$$\text{Wachstums-Prozentwert als Zahl} = \frac{\text{Endwert}}{\text{Startwert}} - 1$$

$$\text{Endwert} = \text{Startwert} * (\text{Wachstums-Prozentwert als Zahl} + 1)$$

1.000 EUR sollen um 5% wachsen: $1.000 * (0,05 + 1) = 1.050 \text{ EUR}$

1.000 EUR sollen um 110% wachsen: $1.000 * (1,1 + 1) = 2.100 \text{ EUR}$

2.200 EUR sollen um 230% wachsen: $2.200 * (2,3 + 1) = 7.260 \text{ EUR}$

1.050 EUR sollen um 425% wachsen: $1.050 * (4,25 + 1) = 5.512,50 \text{ EUR}$

1.200 EUR sollen um 100.050% wachsen: $1.200 + (1.000,5 + 1) = 1.201.800 \text{ EUR}$

- **Prozentuale Schrumpfung**

$$\text{Schrumpfungs-Prozentwert als Zahl} = \frac{\text{Startwert} - \text{Endwert}}{\text{Startwert}}$$

$$\text{Endwert} = \text{Startwert} - (\text{Schrumpfungs-Prozentwert als Zahl} * \text{Startwert})$$

$$1.000 \text{ EUR sollen um } 80\% \text{ schrumpfen: } 1.000 - (0,8 * 1.000) = 200 \text{ EUR}$$

$$1.050 \text{ EUR sollen um } 5\% \text{ schrumpfen: } 1.050 - (0,05 * 1.050) = 997,5 \text{ EUR}$$

$$1.100 \text{ EUR sollen um } 90\% \text{ schrumpfen: } 1.100 - (0,9 * 1.100) = 2.100 \text{ EUR}$$

$$7.300 \text{ EUR sollen um } 45\% \text{ schrumpfen: } 7.300 - (0,45 * 7.300) = 4.015 \text{ EUR}$$

$$1.050 \text{ EUR sollen um } 0,3\% \text{ schrumpfen: } 1.050 - (0,003 * 1.050) = 1.046,85 \text{ EUR}$$

$$1.500 \text{ EUR sollen um } 375\% \text{ schrumpfen: } 1.500 - (3,75 * 1.500) = -4.125,00 \text{ EUR}$$

- In der Finanzmathematik kann es zweckmäßig sein, Zahlungsströme auf eine standardisierte Basis von 100 nominalen Geldeinheiten zu beziehen, denn dann können Berechnungsergebnisse grds. ohne weitere Umformungen auch in % ausgedrückt werden.

Beispiel:

Aus einer Anleihe mit zweijähriger Restlaufzeit fließen bei einem Marktzinssatz von 5,5% folgende Beträge in Geldeinheiten (= GE) zu:

$$t_1 = 8.750,00 \text{ GE Zins}$$

$$t_2 = 8.750,00 \text{ GE Zins}$$

$$t_2 = 125.000,00 \text{ GE Rückzahlung des Nominalwertes}$$

Zu welchem Preis wurde die Anleihe in t_0 erworben?

Zur Lösung der Aufgabe kann man die Zahlungen diskontieren:

$$C'_0(i_{eff} = 5,5\%) = 8.750 * 1,055^{-1} + (8.750 + 125.000) * 1,055^{-2}$$

$$C'_0(i_{eff} = 5,5\%) = 128.461,849464 \text{ GE}$$

Problem bei dieser Berechnung ist allerdings, dass Preise von Anleihen in Prozent, d.h. pro 100 GE Nominalwert angegeben werden. Es wird daher zunächst der Divisor x zu berechnen, durch den der Nominalwert zu teilen ist, um einen Nominalwert von 100 GE zu erhalten:

$$\frac{125.000,00}{x} = 100 \text{ GE} \Rightarrow x = 1.250 \text{ GE}$$

Alle Beträge des Zahlungsstromes sind sodann durch x zu dividieren, um einen Zahlungsstrom auf einer standardisierten Basis von 100 nominalen Geldeinheiten zu erhalten:

$$t_1 = \frac{8.750,00}{1.250} = 7 \text{ GE Zins}$$

$$t_2 = \frac{8.750,00}{1.250} = 7 \text{ GE Zins}$$

$$t_2 = \frac{125.000,00}{1.250} = 100 \text{ GE Rückzahlung des Nominalwertes}$$

$$C'_0(i_{eff} = 5,5\%)[\%] = 7 * 1,055^{-1} + (7 + 100) * 1,055^{-2}$$

$$C'_0(i_{eff} = 5,5\%)[\%] = 102,769479571 \text{ GE}$$

$$C'_0(i_{eff} = 5,5\%)[\%] = \mathbf{102,769479571\%}$$

2. Jährliche Verzinsung

2.1. Grundlagen

- **Zinssatz i**

Der Zinssatz i bezieht sich in der Regel auf ein Jahr. Es können auch andere Zinsperioden festgelegt werden, die kürzer als ein Jahr sind (z.B. Halbjahr, Quartal, Monat, Tag). Man spricht dann von **unterjährlicher Verzinsung**. Mithin ist zwischen Zinsperiode und Laufzeit einer Kapitalanlage zu unterscheiden.

- **Berechnungsvarianten für Zinsen**

Zinsen können unterschiedlich berechnet werden:

nach der Länge der Zinsperiode		Behandlung der bereits gezahlten Zinsen		Zeitpunkt der Zinszahlung, wenn das Kapital weiterhin angelegt bleibt	
jährliche Verzinsung	unterjährliche Verzinsung	einfache Verzinsung	Zinseszinsen	nachschüssige Zinszahlung	vorschüssige Zinszahlung

- **Grundannahmen der Zinseszinsrechnung**

- Zinszahlungen erfolgen auch während der Laufzeit einer Kapitalanlage.
- Zinszahlungen erfolgen jeweils am Ende einer Zinsperiode bzw. einer Subperiode.
- Zinszahlungen werden dem Kapital zugeschlagen, sofort wieder angelegt und somit in der nächsten Zinsperiode mitverzinst.
- Die kleinste Zeitspanne, für die Zinsen berechnet werden, ist ein Tag.
- Erfolgen bei einem gegebenen Nominalzinssatz Zinszahlungen unterjährig, ist die Rendite aufgrund des Zinseszinseseffektes höher als der Nominalzinssatz.
- Zinssätze für unterschiedliche Periodenlängen können konform ineinander umgerechnet werden.

2.2. Jährliche einfache Verzinsung bzw. lineare Verzinsung (ohne Zinseszinsen)

- **Jahreszins ohne Zinseszins:**

$$K_n = K_0 * (1 + n * i_{nom})$$

K_n = Endkapital, Endwert

K_0 = Anfangskapital, Nominalkapital

n = Laufzeit in Jahren (inkl. gebrochene Jahreszahlen)

i_{nom} = Nomineller Jahreszinssatz

Beispiel:

500,00 Geldeinheiten (= GE); 2,4 Jahre; 6% p.a.

$$K_n = K_0 * (1 + n * i_{nom}) = 500,00 * (1 + 2,4 * 0,06) = 572,00 \text{ GE}$$

- **Monatszins ohne Zinseszins**

$$K_n = K_0 * \left(1 + m * \frac{i_{nom}}{12}\right)$$

m = Laufzeit in Monaten (inkl. gebrochene Monatszahlen)

$\frac{i_{nom}}{12} = i_m$ = Relativer unterjährlicher Periodenzinssatz, relativer Subperiodenzinssatz (Monatsbezug)

Beispiel:

500,00 GE; 28,7 Monate; 6% p.a.

$$K_n = K_0 * \left(1 + m * \frac{i_{nom}}{12}\right) = 500,00 * \left(1 + 28,7 * \frac{0,06}{12}\right) = 571,75 \text{ GE}$$

- **Tageszins ohne Zinseszins**

$$K_n = K_0 * \left(1 + t * \frac{i_{nom}}{360}\right)$$

t = Laufzeit in Tagen

$\frac{i_{nom}}{360} = i_t$ = Relativer unterjährlicher Periodenzinssatz, relativer Subperiodenzinssatz (Tagesbezug)

Beispiel:

500,00 GE; 571 Tage; 6% p.a.

$$K_n = K_0 * \left(1 + t * \frac{i_{nom}}{360}\right) = 500,00 * \left(1 + 571 * \frac{0,06}{360}\right) = 547,58333 \text{ GE}$$

- **Einfache Verzinsung generell**

$$K_n = K_0 * (1 + n * i_{nom})$$

$$K_n = K_0 * (1 + m * i_m)$$

$$K_n = K_0 * (1 + t * i_t)$$

K_n = Endkapital, Endwert

K_0 = Anfangskapital, Nominalkapital

n = Laufzeit in Jahren (inkl. gebrochene Jahreszahlen)

i_{nom} = Nomineller Jahreszinssatz

m = Laufzeit in Monaten (inkl. gebrochene Monatszahlen)

$i_m = \frac{i_{nom}}{12}$ = Relativer unterjährlicher Periodenzinssatz, relativer Subperiodenzinssatz (Monatsbezug)

t = Laufzeit in Tagen

$i_t = \frac{i_{nom}}{360}$ = relativer unterjährlicher Periodenzinssatz, relativer Subperiodenzinssatz (Tagesbezug)

Beispiel:

Ein Kapital von 1.000,00 GE wird bei monatlicher Verzinsung zu einem nominalen Jahreszinssatz von 6% angelegt. Wie hoch ist das Endkapital nach 2 Jahren und 4 Monaten?

$$K_n = K_0 * (1 + m * i_m)$$

$$K_n = 1.000.000 * \left(1 + 28 * \frac{0,06}{12}\right) = 1.140.000 \text{ GE}$$

- **Berechnung des Anfangskapitals (= Grundbetrag)**

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + n * i_{nom}}$$

Das Anfangskapital K_0 kann auch als Barwert (= Kurs) bei einfacher Verzinsung bezeichnet werden.

Ein Barwert gibt den auf die Gegenwart bezogenen Wert **zukünftiger** Zahlungen an. Den Vorgang der Barwert-Ermittlung nennt man **Abzinsung** oder **Diskontierung**.

- **Beispiel 1:**

X hat am 01.01.2000 dem Y einen Betrag von 870,00 GE geliehen. Y verpflichtet sich, das Kapital mit $i_{nom} = 11\%$ einfach zu verzinsen und am 31.12.2009 zurückzuzahlen. Welchen Betrag muss Y zahlen?

$$K_n = K_0 * (1 + n * i_{nom})$$

$$K_9 = 870,00 * (1 + 10 * 0,11) = 1.872,00 \text{ GE}$$

- **Beispiel 2:**

X verspricht für die Einräumung eines Wegerechts nach Ablauf von 5 Jahren einen Betrag von 10.000 GE zu zahlen. Welchen Barwert hat diese zukünftige Zahlung heute bei 8% einfachen Zinsen?

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + n * i_{nom}}$$

$$K_0 = \frac{10.000}{1 + 5 * 0,08} = 7.142,86 \text{ GE}$$

2.3. Jährliche Verzinsung mit Zinseszinsen bzw. exponentielle Verzinsung

- **Jahreszins mit Zinseszinsen, allgemeine Zinseszinsformel, Endkapitalformel, Aufzinsung**

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^n$$

Beispiel 1:

500,00 GE; 2,4 Jahre; 6% p.a.

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^n = 500,00 * (1 + 0,06)^{2,4} = 575,04798 \text{ GE}$$

Beispiel 2:

10.000,00 GE werden zu 5% p.a. angelegt. Auf welchen Wert ist das Kapital einschließlich Zinseszinsen nach 270 Tagen gewachsen?

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^n = 10.000,00 * (1 + 0,05)^{0,75} = 10.372,7038 \text{ GE}$$

Beispiel 3:

400,00 GE werden für vier Jahre und 6 Monate zu 10% p.a. angelegt. Wie hoch ist das Endkapital?

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^n = 400,00 * (1 + 0,1)^{4,5} = 614,22441 \text{ GE}$$

- **Diskontierung, Abzinsung**

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + i_{nom})^n}$$

Beispiel:

Ein Wechsel über 5.000 GE ist bei 8% Zinseszinsen nach Ablauf von 4 Jahren fällig. Wie groß ist der Barwert des Wechsels, d.h. zu welchem Betrag würde eine Bank heute den Wechsel ankaufen?

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + i_{nom})^n}$$

$$K_0 = \frac{5.000}{(1 + 0,08)^4} = 3.675,15 \text{ GE}$$

- **Berechnung des Zinssatzes**

$$i_{nom} = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Beispiel:

Ein Kapital von 5.000 GE ist nach 7-jähriger Anlage auf 10.000 GE angewachsen. Wie groß war die erzielte durchschnittliche Verzinsung?

$$i_{nom} = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

$$i_{nom} = \sqrt[7]{\frac{10.000}{5.000}} - 1 = 10,408951\%$$

- **Berechnung der Anzahl der Zinsabschnitte bzw. des Verzinsungszeitraumes**

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^n$$

$$(1 + i_{nom})^n = \frac{K_n}{K_0}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\log(1 + i)}$$

$$n = \frac{\lg K_n - \lg K_0}{\lg(1 + i)}$$

- **Aufzinsung, Abzinsung**

Aufzinsung:=

Die Ermittlung eines in der Zukunft liegenden Endkapitals K_n durch Multiplikation des Anfangskapitals K_0 mit dem Aufzinsungsfaktor q^n

$$K_n = K_0 * q^n$$

Abzinsung:=

Die Ermittlung des Barwertes bzw. des Anfangskapitals K_0 durch Multiplikation des Endkapitals K_n mit dem Abzinsungsfaktor q^{-n}

$$K_0 = K_n * q^{-n}$$

2.4. Hintergründe zur linearen und exponentiellen Verzinsung

- Bei der **linearen Verzinsung** (= einfache Verzinsung) werden die Zinsen nicht in der jeweiligen Folgeperiode mitverzinst, so dass es bei der einfachen Verzinsung keine Zinseszinsen gibt.
- Bei der **exponentielle Verzinsung** (= zinseszinsliche Verzinsung, geometrische Verzinsung) werden die Zinsen am Ende jeder Zinsperiode dem Kapital hinzuaddiert und in der nächsten Zinsperiode mitverzinst.
- Bei der exponentiellen Verzinsung wird der Zinseszinseffekt durch die Verzinsungsdauer VD im Exponenten der Endkapitalformel dargestellt:

$$K_n = K_0 * (1 + i_{ZP})^{VD}$$

i_{ZP} = Periodenzinssatz bei ZP Zinsperioden pro Jahr

$(1 + i_{ZP})^{VD}$ = **Exponentieller Aufzinsungsfaktor** für eine Verzinsungsdauer von VD Zinsperioden

Formt man die Endkapitalformel nach dem Anfangskapital K_0 um, so erhält man die Barwertformel bei exponentieller Verzinsung:

$$K_0 = K_n * (1 + i_{ZP})^{-VD}$$

$\frac{1}{(1 + i_{ZP})^{VD}}$ = **Exponentieller Abzinsungsfaktor** für eine Verzinsungsdauer von VD Zinsperioden

Die Verzinsungsdauer VD kann sowohl ganzzahlige als auch gebrochene Verzinsungsdauern umfassen.

- Ist die Verzinsungsdauer **kürzer** als eine Zinsperiode, so wirkt die **lineare Verzinsung** stärker als die exponentielle Verzinsung. Das bedeutet, dass sich bei der linearen Aufzinsung (von einem bestimmten Anfangskapital ausgehend) ein **höheres Endkapital** als bei der exponentiellen Aufzinsung ergibt bzw. dass bei der linearen Abzinsung (von einem bestimmten Endkapital ausgehend) ein **geringerer Barwert** als bei der exponentiellen Abzinsung entsteht.

Wenn die Verzinsungsdauer **exakt** einer Zinsperiode **entspricht**, wirken diese beiden Verzinsungsformen gleich stark. Sie führen sowohl bei der Aufzinsung als auch bei der Abzinsung zum **gleichen Ergebnis**.

Ist die Verzinsungsdauer **länger** als eine Zinsperiode, wirkt die **exponentielle Verzinsung** stärker als die lineare Verzinsung (d.h. **höherer Endkapitalwert** bzw. **geringerer Barwert**).

- Beispiel¹:

Wie hoch ist der Endkapital K_n eines Anfangskapitals K_0 in Höhe von 100 GE bei linearer bzw. exponentieller Aufzinsung um

- a) 0,5 Jahre
- b) 1 Jahr
- c) 1,5 Jahre

bei jährlicher Verzinsung von 10%?

Verzinsungsdauer n [Jahre]	Endkapital bei linearer Aufzinsung [GE] $K_n = 100 * (1 + n * 0,1)$	Endkapital bei exponentieller Aufzinsung [GE] $K_n = 100 * (1 + 0,1)^n$
0,5	105,00	104,88
1	110,00	110,00
1,5	115,00	115,37

- Exponentielle Verzinsung mit unterjährlichen Zinsperioden wirkt auch dann stärker als exponentielle Verzinsung mit jährlichen Zinsperioden, wenn die Verzinsungsperiode kürzer ist als eine Subperiode.

Beispiel:

Wie hoch ist das Endkapital K_n eines Anfangskapitals K_0 in Höhe von 100 GE bei $i_{nom} = 6\%$, einer Anlagedauer von 0,5 Monaten und jährlicher bzw. monatlicher exponentieller Verzinsung?

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^n$$

$$K_n = 100 * (1 + 0,06)^{\frac{0,5}{12}} = 100,243082084 \text{ EUR}$$

$$K_n^{(m)} = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{12}\right)^m$$

$$K_n^{(m)} = 100 * \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{0,5} = 100,249688279 \text{ EUR}$$

¹ Manfred Fröhlich: Handbuch der Renditeberechnung, 2. Auflage, 2002, S. 19 f.

2.5. Einzelheiten zur Zinseszinsrechnung

- **Zinseszinsformel:**

$$K_n = K_0 * (1 + i)^n = K_0 * q_n$$

- **Zinsfaktor q :**

$$q = (1 + i)$$

- **Aufzinsungsfaktor q_n :**

$$q_n = (1 + i)^n$$

Abzinsungsfaktor q_n (= Diskontierungsfaktor, Diskontfaktor):

$$q_n = (1 + i)^{-n}$$

- **Barwertformel:**

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + i)^n}$$

Daraus abgeleitet:

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

$$n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln(1 + i)} = \frac{\ln \frac{K_n}{K_0}}{\ln(1 + i)}$$

3. Unterjährliche Verzinsung

3.1. Unterjährliche einfache Verzinsung

- Bei unterjährlicher einfacher Verzinsung werden die Zinsen mehrmals in einem Jahr ausgezahlt und dann neben dem Kapital unverzinslich angesammelt.
- **Berechnung der kumulierten Monatszinsen Z_m**

$$Z_m = \frac{K_0 * i_{nom} * m}{12}$$

m = Laufzeit in Monaten (inkl. gebrochene Monatszahlen)

- **Berechnung der kumulierten Tageszinsen Z_t**

$$Z_t = \frac{K_0 * i_{nom} * t}{360}$$

t = Laufzeit in Tagen

- **Berechnung des Endkapitals K_n bei monatlicher Verzinsung**

$$K_n = K_0 + \frac{K_0 * i_{nom} * m}{12}$$

Beispiel:

Ein Kapital von 1.000 GE ist 36 Monate lang zu 4% einfachen Halbjahreszinsen angelegt. Wie hoch ist das Endkapital?

Umrechnung des Halbjahreszinses in den Jahreszins:

$$4\% * 2 = 8\%$$

$$K_n = K_0 + \frac{K_0 * i_{nom} * m}{12}$$

$$K_n = 1.000 + \frac{1.000 * 0,08 * 36}{12} = 1.240 \text{ GE}$$

- **Berechnung des Endbetrages K_n bei täglicher Verzinsung**

$$K_n = K_0 + \frac{K_0 * i_{nom} * t}{360}$$

Beispiel:

Für kurzfristige Geldanlagen gewährt eine Bank 1,8% einfache Zinsen pro Vierteljahr. Ein Unternehmen möchte 100.000 GE für 36 Tage anlegen. Welcher Kapitalbetrag wird zurückgezahlt?

Umrechnung des Vierteljahrzinses in den Jahreszins:

$$1,8\% * 4 = 7,2\%$$

$$K_n = K_0 + \frac{K_0 * i_{nom} * t}{360}$$

$$K_n = 100.000 + \frac{100.000 * 0,072 * 36}{360} = 100.720 \text{ GE}$$

- **Berechnung des Anfangskapitals K_0 bei monatlicher Verzinsung**

$$K_0 = \frac{Z_m * 12}{i_{nom} * m} = \frac{K_n * 12}{12 + i_{nom} * m}$$

Herleitung:

$$K_n = K_0 + \frac{K_0 * i_{nom} * m}{12} = \frac{12 * K_0}{12} + \frac{K_0 * i_{nom} * m}{12} = \frac{K_0 * (12 + i_{nom} * m)}{12} \Rightarrow$$
$$K_0 = \frac{K_n * 12}{12 + i_{nom} * m}$$

- **Berechnung des Anfangskapitals K_0 bei täglicher Verzinsung**

$$K_0 = \frac{Z_t * 360}{i_{nom} * m} = \frac{K_n * 360}{360 + i_{nom} * m}$$

Herleitung:

$$K_n = K_0 + \frac{K_0 * i_{nom} * m}{360} = \frac{360 * K_0}{360} + \frac{K_0 * i_{nom} * m}{360} = \frac{K_0 * (360 + i_{nom} * m)}{360} \Rightarrow$$
$$K_0 = \frac{K_n * 360}{360 + i_{nom} * m}$$

- **Berechnung des Zinssatzes i_{nom} bei monatlicher Verzinsung**

$$i_{nom} = \frac{12 * (K_n - K_0)}{K_0 * m}$$

- **Berechnung des Zinssatzes i_{nom} bei täglicher Verzinsung**

$$i_{nom} = \frac{360 * (K_n - K_0)}{K_0 * t}$$

- **Berechnung der Zeit m bei monatlicher Verzinsung**

$$m = \frac{12 * (K_n - K_0)}{K_0 * i_{nom}}$$

- **Berechnung der Zeit t bei täglicher Verzinsung**

$$t = \frac{360 * (K_n - K_0)}{360 * i_{nom}}$$

3.2. Unterjährliche Verzinsung mit Zinseszinsen

- Bei unterjährlicher Verzinsung mit Zinseszinsen werden die Zinsen mehrmals in einem Jahr ausgezahlt und dann neben dem Kapital mitverzinst.
- **Berechnung des Endkapitals K_n bei monatlicher Verzinsung (Monatszins mit Zinseszinsen)**

$$K_n^m = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{12}\right)^m$$

$\frac{i_{nom}}{12} = i_m = \text{Relativer unterjährlicher Periodenzinssatz, relativer Subperioden-}$
 $\text{zinssatz (Monatsbezug)}$

$m = \text{Laufzeit in Monaten (inkl. gebrochene Monatszahlen)}$

Es darf nicht gerechnet werden $K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^{m/12}$ bzw. $K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^{t/360}$, denn dann wäre die Basis kein Monatszins, sondern ein Jahreszins bei gebrochener Verzinsungsdauer. Wenn man bei unterjähriger Verzinsung so rechnen wollte, müsste man zunächst den effektiven Jahreszinssatz bzw. den konformen Jahreszinssatz für die jeweilige unterjährige Verzinsungsart (hier Monatszins) nach der folgenden Formel berechnen:

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^m - 1$$

$i_{eff} = \text{Effektiver Jahreszinssatz, Effektivzinssatz, konformer Jahreszinssatz,}$
 $\text{Jahresrendite, Marktzinssatz}$

Beispiel 1:

500,00 GE werden zu 8% Jahreszins monatlich verzinst. Welches Kapital liegt nach 5 Jahren vor?

$$K_n^m = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{12}\right)^m$$

$$K_n^m = 500 * \left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^{60} = 744,92 \text{ GE}$$

Bei jährlicher Verzinsung würde sich hingegen ein Endbetrag in Höhe von lediglich 734,66 GE ergeben.

Beispiel 2:

Eine Anleihe wird mit 6% Jahreszins verzinst, wobei die Zinsen viermal jährlich zum Quartalsende ausgezahlt werden. Die Depotbank verpflichtet sich, die ausgezahlten Zinsen zu 6% zinseszinslich anzulegen, bei ebenfalls vierteljährlicher

Zinszahlung. Ein Bankkunde legt 10.000 GE für 5 Jahre in einer derartigen Konstruktion an. Welches Endkapital liegt nach 5 Jahren vor?

$$K_n^q = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{4}\right)^q$$

$$K_n^q = 10.000 * \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{20} = 13.468,55 \text{ GE}$$

Beispiel 3:

1.200,00 GE; 5 Monate; 5%; $K_n = ?$

$$K_n^m = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{12}\right)^m$$

$$K_n^m = 1.200,00 * \left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^5 = 1.225,2092 \text{ GE}$$

Alternativ:

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^{12} - 1 = 5,116189788\%$$

$$K_n = K_0 * (1 + i_{eff})^{\frac{m}{12}}$$

$$K_n = 1.200,00 * (1 + 0,05116189788)^{\frac{5}{12}} = 1.225,2092 \text{ GE}$$

bzw.

$$K_n = K_0 * (1 + i_{eff})^{\frac{t}{360}}$$

$$K_n = 1.200,00 * (1 + 0,05116189788)^{\frac{150}{360}} = 1.225,2092 \text{ GE}$$

Beispiel 4:

500,00 GE; 28,7 Monate; 6% p.a.; $K_n = ?$

$$K_n^m = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{12}\right)^m$$

$$K_n^m = 500,00 * \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{28,7} = 576,94708 \text{ GE}$$

Alternativ:

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} - 1 = 6,167781186\%$$

$$K_n = K_0 * (1 + i_{eff})^{\frac{m}{12}}$$

$$K_n = 500,00 * (1 + 0,06167781186)^{\frac{28,7}{12}} = 576,94708 \text{ GE}$$

bzw.

$$K_n = K_0 * (1 + i_{eff})^{\frac{t}{360}}$$

$$K_n = 500,00 * (1 + 0,06167781186)^{\frac{861}{360}} = 576,94708 \text{ EUR}$$

- **Berechnung des Endkapitals K_n bei täglicher Verzinsung (Tageszins mit Zinseszinsen)**

$$K_n^t = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{360}\right)^t$$

$$\frac{i_{nom}}{360} = i_t = \text{Relativer unterjährlicher Periodenzinssatz, relativer Subperioden-}$$

zinssatz (Tagesbezug)

$t = \text{Laufzeit in Tagen}$

Es darf nicht gerechnet werden $K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^{t/360}$, denn dann wäre die Basis kein Tageszins, sondern ein Jahreszins bei gebrochener Verzinsungsdauer. Wenn man bei unterjähriger Verzinsung so rechnen wollte, müsste man zunächst den effektiven Jahreszinssatz bzw. den konformen Jahreszinssatz für die jeweilige unterjährige Verzinsungsart (hier Tageszins) nach der folgenden Formel berechnen:

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{t}\right)^t - 1$$

Beispiel 1:

500,00 GE; 571 Tage; 6% p.a.

$$K_n^t = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{360}\right)^t$$

$$K_n^t = 500,00 * \left(1 + \frac{0,06}{360}\right)^{571} = 549,91671 \text{ GE}$$

Alternativ:

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{t}\right)^t - 1 = \left(1 + \frac{0,06}{360}\right)^{360} - 1 = 6,183123794\%$$

$$K_n = K_0 * (1 + i_{eff})^{\frac{t}{360}}$$

$$K_n = 500,00 * (1 + 0,06183123794)^{\frac{571}{360}} = 549,91671 \text{ GE}$$

Beispiel 2:

500,00 GE; 2.321 Tage; 3,7% p.a.

$$K_n^t = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{360}\right)^t$$

$$K_n^t = 500,00 * \left(1 + \frac{0,037}{360}\right)^{2.321} = 634,69404 \text{ GE}$$

Alternativ:

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{t}\right)^t - 1 = \left(1 + \frac{0,037}{360}\right)^{360} - 1 = 3,769104789\%$$

$$K_n = K_0 * (1 + i_{eff})^{\frac{t}{360}}$$

$$K_n = 500,00 * (1 + 0,03769104789)^{\frac{2.321}{360}} = 634,69404 \text{ GE}$$

- **Endwert bei zinseszinslicher Verzinsung mit relativen unterjährlichen Periodenzinssätzen**

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^n$$

$$K_n^q = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{4}\right)^q = K_0 * (1 + i_q)^q$$

$$K_n^m = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{12}\right)^m = K_0 * (1 + i_m)^m$$

$$K_n^t = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{360}\right)^t = K_0 * (1 + i_t)^t$$

K_n = Endkapital

K_0 = Anfangskapital, Nominalkapital

i_{nom} = Nomineller Jahreszinssatz

n = Laufzeit in Jahren (inkl. gebrochene Jahreszahlen)

$i_q = \frac{i_{nom}}{4}$ = Relativer unterjährlicher Periodenzinssatz, relativer Subperiodenzinssatz (Quartalsbezug)

q = Laufzeit in Quartalen (inkl. gebrochene Quartalszahlen)

$i_m = \frac{i_{nom}}{12}$ = Relativer unterjährlicher Periodenzinssatz, relativer Subperiodenzinssatz (Monatsbezug)

m = Laufzeit in Monaten (inkl. gebrochene Monatszahlen)

$i_t = \frac{i_{nom}}{360}$ = Relativer unterjährlicher Periodenzinssatz, relativer Subperiodenzinssatz (Tagesbezug)

t = Laufzeit in Tagen

Beispiel:

Ein Kapital von 1.000 GE wird bei monatlicher zinseszinslicher Verzinsung zu einem nominellen Jahreszinssatz von 6% angelegt. Wie hoch ist das Endkapital nach 2 Jahren und 4 Monaten?

$$K_n^m = K_0 * (1 + i_m)^m$$

$$K_n^m = 1.000,00 * \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{28} = 1.149,87261 \text{ GE}$$

Alternativ:

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} - 1 = 6,167781186\%$$

$$K_n = K_0 * (1 + i_{eff})^{\frac{m}{12}}$$

$$K_n = 1.000,00 * (1 + 0,06167781186)^{\frac{28}{12}} = 1.149,87261 \text{ GE}$$

bzw.

$$K_n = K_0 * (1 + i_{eff})^{\frac{t}{360}}$$

$$K_n = 1.000,00 * (1 + 0,06167781186)^{\frac{840}{360}} = 1.149,87261 \text{ GE}$$

- **Endwert bei zinseszinslicher Verzinsung mit effektivem Jahreszinssatz**

$$K_n = K_0 * (1 + i_{eff})^n$$

$$K_n^{subp'} = K_n^q = K_0 * (1 + i_{eff})^{\frac{q}{4}}$$

$$K_n^{subp'} = K_n^m = K_0 * (1 + i_{eff})^{\frac{m}{12}}$$

$$K_n^{subp'} = K_n^t = K_0 * (1 + i_{eff})^{\frac{t}{360}}$$

Im Exponenten stehen immer Jahre, ggf. als gebrochene Jahreszahl.

Beispiel:

Ein Kapital von 1.000 GE wird bei jährlicher zinseszinslicher Verzinsung zu einem effektiven Jahreszinssatz von 6% angelegt. Wie hoch ist das Endkapital nach 2 Jahren und 4 Monaten?

$$K_n^{subp'} = K_n^m = K_0 * (1 + i_{eff})^{\frac{m}{12}}$$

$$K_n^m = 1.000 * (1 + 0,06)^{\frac{28}{12}} = 1.145,63696727 \text{ GE}$$

3.3. Nomineller vs. relativer Zinssatz

- Wird der **nominelle Jahreszinssatz** i_{nom} durch die Zahl der Subperioden $subp'$ eines Jahres (Halbjahre, Quartale, Monate, Tage) dividiert, erhält man den zum nominellen Jahreszinssatz i_{nom} gehörenden **relativen unterjährlichen Periodenzinssatz** $i_{subp'}$ (= relativer Subperiodenzinssatz). Die Zinsen einer Subperiode ergeben sich dann aus der Verzinsung mit dem relativen unterjährlichen Periodenzinssatz

$$i_{subp'} = \frac{i_{nom}(subp')}{subp'}$$

Daraus abgeleitet:

$$i_{nom}(subp') = i_{subp'} * subp'$$

$i_{subp'}$ = Relativer unterjährlicher Periodenzinssatz, relativer Subperiodenzinssatz

$i_{nom}(subp')$ = i_{nom} = Nomineller Jahreszinssatz

$subp'$ = Sub- bzw. Zinsperioden pro Jahr: Jahre ($j = 1$) $\vee$ Halbjahre ($h = 2$) $\vee$ Quartale ($q = 4$) $\vee$ Monate ($m = 12$) $\vee$ Tage ($t = 360$)

$subp$ = Jeweilige Laufzeit in Sub- bzw. Zinsperioden (inkl. gebrochene Subperiodenzahlen)

Dabei liefert subp-maliges Aufzinsen mit $i_{subp'}$ ein anderes Endkapital als einmaliges Aufzinsen mit i_{nom} . $i_{subp'}$ und i_{nom} liefern (bei gleichem Verzinsungszeitraum) nichtäquivalente Werte.

- $i_{subp'} = \frac{i_{nom}(subp')}{subp'}$ würde bei unterjährlicher zinseszinslicher Verzinsung einen höheren Endwert erbringen als i_{nom} bei jährlicher Verzinsung. Um den Endwert anzugleichen, kann ein zu i_{nom} konformer unterjährlicher Zinssatz $\hat{i}_{subp'}$ bestimmt werden:

$$\hat{i}_{subp'} = \sqrt[subp']{1 + i_{nom}} - 1$$

$\hat{i}_{subp'}$ ist kleiner als $\frac{i_{nom}(subp')}{subp'}$, da durch den unterjährlichen Zinseszinsseffekt ein bisheriger Endwert schneller erreicht wird.

Beispiel:

Verzinsung von 150 GE zu 5% p.a. über 3 Jahre.

Endwert bei jährlicher Verzinsung:

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^n = 150 * (1 + 0,05)^3 = 173,64375 \text{ GE}$$

Endwert bei unterjährlicher monatlicher Verzinsung:

$$K_n^{(m)} = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}(subp')}{subp'}\right)^m = 150 * \left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^{36} = 150 * (1 + 0,0041\bar{6})^{36}$$

$$K_n^{(m)} = 174,2208347 \text{ GE}$$

Endwert bei Anwendung eines zu i_{nom} konformen unterjährlichen Zinssatzes $\hat{i}_{subp'}$:

$$\hat{i}_{subp'} = \sqrt[subp']{1 + i_{nom}} - 1$$

$$\hat{i}_{subp'} = \sqrt[12]{1 + 0,05} - 1 = 0,40741237836\%$$

$$K_n^{(m)} = K_0 * (1 + \hat{i}_{subp'})^m = 150 * (1 + 0,0040741237836)^{36} = 173,64375 \text{ GE}$$

- Andererseits könnte man einen zu $i_{subp'} = \frac{i_{nom}(subp')}{subp'}$ konformen effektiven Jahreszinssatz i_{eff} bestimmen, der anstelle der unterjährlichen zinseszinslichen Verzinsung einen identischen Endwert bei jährlicher Verzinsung liefert:

$$K_n^{(subp')} = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}(subp')}{subp'}\right)^{n*subp'} = K_0 * (1 + i_{eff})^n$$

$$\left(1 + \frac{i_{nom}(subp')}{subp'}\right)^{n*subp'} = (1 + i_{eff})^n$$

$$\left(1 + \frac{i_{nom}(subp')}{subp'}\right)^{subp'} = (1 + i_{eff})$$

$$(1 + i_{subp'})^{subp'} = (1 + i_{eff})$$

$$i_{eff} = (1 + i_{subp'})^{subp'} - 1$$

$$i_{subp'} = \sqrt[subp']{1 + i_{eff}} - 1$$

$$i_{subp'} = (1 + i_{eff})^{\frac{1}{subp'}} - 1$$

i_{eff} ist größer als $\frac{i_{nom}(subp')}{subp'}$, da i_{eff} ein Jahreszinssatz ist und den unterjährlichen Zinseszinsseffekt durch eine jährliche zinseszinsliche Verzinsung erreichen muss.

Beispiel:

Verzinsung von 150 GE zu 5% p.a. über 3 Jahre.

Endwert bei jährlicher Verzinsung:

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^n = 150 * (1 + 0,05)^3 = 173,64375 \text{ GE}$$

Endwert bei unterjährlicher monatlicher Verzinsung:

$$K_n^{(m)} = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}(subp')}{subp'}\right)^m = 150 * \left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^{36} = 150 * (1 + 0,0041\bar{6})^{36}$$

$$K_n^{(m)} = 174,2208347 \text{ GE}$$

Endwert bei Anwendung des Effektivzinssatzes:

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{i_{nom}(subp')}{subp'}\right)^{subp'} - 1 = (1 + i_{subp'})^{subp} - 1$$

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^{12} - 1 = 5,116189788\%$$

$$K_n = K_0 * (1 + i_{eff})^n = 150 * (1 + 0,05116189788)^3 = 174,2208347 \text{ GE}$$

- Zwischen dem relativen unterjährigen Periodenzinssatz $i_{subp'}$ und dem effektiven Jahreszinssatz i_{eff} bestehen somit folgende Zusammenhänge:

$$i_{subp'} = (1 + i_{eff})^{\frac{1}{subp'}} - 1 = \sqrt[subp']{1 + i_{eff}} - 1$$

$$i_{eff} = (1 + i_{subp'})^{subp'} - 1$$

$$i_{eff} = (1 + i_{subp'})^{\frac{360}{t_{subp'}}} - 1$$

$t_{subp'}$ = Konstante Dauer der Subperioden

Ferner gilt

$$i_{subp'} = \frac{i_{nom}(subp')}{subp'} = (1 + i_{eff})^{\frac{1}{subp'}} - 1$$

sofern

$$i_{eff} = (1 + i_{subp'})^{subp'} - 1$$

Beispiel:

$i_{nom} = 5\% \text{ p. a.}$

$subp' = 4$ (quartalsweise zinseszinsliche Verzinsung)

$$i_{subp'} = \frac{i_{nom}(subp')}{subp'} = \frac{0,05}{4} = 1,25\%$$

$$i_{eff} = (1 + i_{subp'})^{subp'} - 1$$

$$i_{eff} = (1 + 0,0125)^4 - 1 = 5,094533691\%$$

$$i_{sub} = \frac{i_{nom}(subp')}{subp'} = (1 + i_{eff})^{\frac{1}{subp'}} - 1$$

$$i_{subp} = \frac{0,05}{4} = (1 + 0,05094533691)^{\frac{1}{4}} - 1 = 1,25\%$$

3.4. Effektiver bzw. konformer Zinssatz

- Der Effektivzinssatz (= effektive Jahreszinssatz, interner Zinssatz, interner Zinsfuß, Jahresrendite) drückt die durchschnittliche Verzinsung des in einem Investitionsobjekt jeweils noch gebundenen Kapitals als Jahreszinssatz aus. Der Effektivzinssatz ist somit ein Jahresdurchschnittszinssatz.
- Bei unterjährlicher Verzinsung mit dem Zinssatz $i_{subp'}$ und $subp'$ Zinsperioden im Jahr sowie durchgehend zinseszinslicher Verzinsung ist

$$i_{eff} = (1 + i_{su})^{subp'} - 1$$

bzw.

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{i_{nom}(sub')}{subp'}\right)^{subp'} - 1$$

der zu i_{subp} **konforme (= äquivalente) Jahreszinssatz** i_{eff} für die jeweilige unterjährliche Verzinsung. Er ist zugleich der **effektive Jahreszinssatz** i_{eff} (= Effektivzinssatz).

Den Jahreszinssatz, der zum gleichen Endkapital führt wie die unterjährliche Verzinsung bei durchgehend zinseszinslicher Verzinsung, bezeichnet man als effektiven Jahreszinssatz i_{eff} .

i_{eff} ist mithin:

→ der effektive Jahreszinssatz (= Effektivzinssatz)

und

→ der zu $i_{subp'}$ konforme (= äquivalente) Jahreszinssatz für die unterjährliche Verzinsung

- Bei unterjährlicher Verzinsung mit dem Zinssatz $i_{subp'}$ und $subp'$ Zinsperioden im Jahr sowie durchgehend zinseszinslicher Verzinsung ist

$$i_{subp} = (1 + i_{eff})^{\frac{1}{subp'}} - 1$$

bzw.

$$i_{subp'} = \sqrt[subp']{1 + i_{eff}} - 1$$

der zu i_{eff} **konforme (= äquivalente) relative Subperiodenzinssatz** $i_{subp'}$ (= relativer unterjährlicher Periodenzinssatz) für die jährliche Verzinsung.

- Für den zu i_{eff} konformen (= äquivalenten) relativen Subperiodenzinssatz bzw. relativen unterjährlichen Periodenzinssatz $i_{subp'} = \sqrt[subp']{1 + i_{eff}} - 1$ gilt:

Als Zinsfaktor ist

$$(1 + i_{subp})^{\frac{Tage}{180 \vee 90 \vee 30}}$$

anstatt

$$(1 + i_{eff})^{\frac{Tage}{360}}$$

zu verwenden.

Als Diskontierungsfaktor ist

$$\frac{1}{(1 + i_{subp'})^{\frac{Tage}{180 \vee 90 \vee 30}}}$$

anstatt

$$\frac{1}{(1 + i_{eff})^{\frac{Tage}{360}}}$$

zu verwenden.

- Bei unterjährlichen Verzinsungen wird eventuell verlangt, dass trotz mehrfacher Zinszahlungen pro Jahr ein bestimmter vorgegebener nominaler Jahreszinssatz nicht überschritten werden soll. Unter diesen Bedingungen kann für die unterjährliche Zinsperiode nicht der relative unterjährliche Zinssatz $i_{subp'}$ vergütet werden, sondern es ist der zum Zinssatz i_{subp} konforme Jahreszinssatz i_{eff} zu vergüten.
- Beispiel 1:

Eine Bank gewährt für eine bestimmte Geldanlage üblicherweise 8% Jahreszinsen. Auf besonderen Wunsch eines Kunden sollen die Zinsen viermal jährlich ausgezahlt werden, wobei der effektive Jahreszinssatz von 8% aber nicht überschritten werden darf. Wie groß muss pro Vierteljahr der konforme unterjährliche Zinssatz sein?

$$i_{subp} = (1 + i_{eff})^{\frac{1}{subp'}} - 1$$

$$i_q = (1 + i_{eff})^{\frac{1}{q}} - 1$$

$$i_q = (1 + 0,08)^{\frac{1}{4}} - 1 = 1,942655\%$$

- Beispiel 2:

Eine Anleihe wird mit 6% Jahreszins verzinst, wobei die Zinsen viermal jährlich zum Quartalsende ausbezahlt werden. Die Depotbank verpflichtet sich, die ausbezahlten Zinsen zu 6% zinseszinslich anzulegen, bei ebenfalls vierteljährlicher Zinszahlung. Ein Bankkunde legt 10.000 GE für 5 Jahre in einer derartigen Konstruktion an. Nach 5 Jahren verfügt er über 13.468,55 GE. Welchen Jahreszins hätte der Bankkunde bekommen müssen, damit das Anfangskapital von 10.000 GE bei vierteljährlicher Verzinsung auf ebenfalls 13.468,55 GE in 5 Jahren anwächst?

$$i_{subp'} = \frac{i_{nom}(subp')}{subp'}$$

$$i_q = \frac{i_{nom}(q)}{q}$$

$$i_q = \frac{0,06}{4} = 1,5\%$$

$$i_{eff} = (1 + i_{subp'})^{subp'} - 1$$

$$i_{eff} = (1 + i_q)^q - 1$$

$$i_{eff} = (1 + 0,015)^4 - 1 = 6,136355\%$$

3.5. Umrechnung effektiver Jahreszinssatz in konformen Subperiodenzinssatz

- Eine Anleihe wird 6% Jahreszinssatz verzinst. Wie hoch ist der konforme Quartalszinssatz?

$$i_{subp'} = (1 + i_{eff})^{\frac{1}{subp'}} - 1$$

$$i_q = (1 + 0,06)^{\frac{1}{4}} - 1 = 1,467384616\%$$

- Rückrechnung

$$i_{eff} = (1 + i_{subp'})^{subp'} - 1$$

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{i_{nom(q)}}{subp'}\right)^{subp'}$$

$$i_{eff} = (1 + 0,01467384616)^4 - 1 = 6\%$$

- Gegeben sei ein effektiver Jahreszinssatz i_{eff} i.H.v. 9,599349% bei 30/360. Berechne den konformen Halbjahreszinssatz i_h , den konformen Monatszinssatz i_m und den konformen Tageszinssatz i_t . Berechne zu vorgenannten unterjährigen Zinssätzen ferner den zugehörigen nominellen Jahreszinssatz $i_{nom(h)}$, $i_{nom(m)}$, $i_{nom(t)}$.

Ein effektiver Jahreszinssatz entspricht Subperiodenzinssätzen, deren nomineller Jahreszinssatz infolge von Zinseszinsseffekten niedriger ist als der effektive Jahreszinssatz.

Der konforme (= äquivalente) Subperiodenzinssatz lässt sich wie folgt in einen zugehörigen nominellen Jahreszinssatz umrechnen:

Konformer Halbjahreszinssatz * 2	= Zugehöriger nomineller Jahreszinssatz zur halbjährlichen Zinszahlung
Konformer Monatszinssatz * 12	= Zugehöriger nomineller Jahreszinssatz zur monatlichen Zinszahlung
Konformer Tageszinssatz * 360	= Zugehöriger nomineller Jahreszinssatz zur täglichen Zinszahlung

$$\textbf{Konformer Subperiodenzinssatz} = i_{subp'} = (1 + i_{eff})^{\frac{1}{subp'}} - 1$$

$$\text{Konformer Jahreszinssatz} = i_j = (1 + i_{eff})^1 - 1 = i_{eff}$$

$$\text{Konformer Halbjahreszinssatz} = i_h = (1 + i_{eff})^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$\text{Konformer Montaszinssatz} = i_m = (1 + i_{eff})^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$\text{Konformer Tageszinssatz} = i_t = (1 + i_{eff})^{\frac{1}{360}} - 1$$

$$\text{Nomineller Jahreszinssatz} = i_{nom} = i_{subp'} * subp'$$

$$\text{Nomineller Jahreszinssatz bei jährlicher Zinszahlung} = i_{nom(j)} = i_j * 1 = i_{eff}$$

$$\text{Nomineller Jahreszinssatz bei halbjährlicher Zinszahlung} = i_{nom(h)} = i_h * 2$$

$$\text{Nomineller Jahreszinssatz bei monatlicher Zinszahlung} = i_{nom(m)} = i_m * 12$$

$$\text{Nomineller Jahreszinssatz bei täglicher Zinszahlung} = i_{nom(t)} = i_t * 360$$

Berechnung des konformen Halbjahreszinssatzes:

$$i_h = (1 + 0,09599349)^{\frac{1}{2}} - 1 = 4,689707708\%$$

Berechnung des zugehörigen nominellen Jahreszinssatzes zur halbjährlichen Zinszahlung bzw. zum Ein-Halbjahreszinssatz:

$$i_{nom(h)} = 4,689707708\% * 2 = 9,379415416\%$$

Berechnung des konformen Monatszinssatzes:

$$i_m = (1 + 0,09599349)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,76676846772\%$$

Berechnung des zugehörigen nominellen Jahreszinssatzes zur monatlichen Zinszahlung bzw. zum Ein-Monatszinssatz:

$$i_{nom(m)} = 0,76676846772\% * 12 = 9,201221612\%$$

Berechnung des konformen Tageszinssatzes:

$$i_t = (1 + 0,09599349)^{\frac{1}{360}} - 1 = 0,0254647\%$$

Berechnung des zugehörigen nominellen Jahreszinssatzes zur täglichen Zinszahlung bzw. zum Ein-Tageszinssatz:

$$i_{nom(t)} = 0,0254647\% * 360 = 9,167291884\%$$

Nun soll ein Kapital von 3.800,00 GE halbjährlich mit einem effektiven Jahreszinssatz i.H.v. 9,599349% p.a. verzinst werden, wobei der halbjährliche Zinsertrag i einmal mit dem effektiven Jahreszinssatz und anschließend jeweils mit den drei nominellen Jahreszinssätzen zu berechnen ist.

Dazu ist der nominelle Jahreszins bei halbjährlicher, monatlicher bzw. täglicher Zinszahlung durch Division durch 2, 12 bzw. 360 zunächst auf den konformen Halbjahres-, Monats- bzw. Tageszinssatz zurückzuführen und anschließend ist der sich ergebende Zinsfaktor mit der jeweiligen Periodenzahl zu exponenzieren:

$$q_{subp'} = \left(1 + \frac{i_{nom}(subp')}{subp'}\right)^{subp}$$

Berechnung jährlicher Zinsertrag mit $i_{nom(j)}$:

$$3.800,00 * \left(1 + \frac{0,09599349}{1}\right)^{\frac{1}{2}} - 3.800 = 178,208893 \text{ GE}$$

bzw.

$$3.800,00 * \left(\left(1 + \frac{0,09599349}{1}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) = 178,208893 \text{ GE}$$

Berechnung halbjährlicher Zinsertrag mit $i_{nom(h)}$:

$$3.800,00 * \left(1 + \frac{0,09379415416}{2}\right)^1 - 3.800 = 178,208893 \text{ GE}$$

bzw.

$$3.800,00 * \left(\left(1 + \frac{0,09379415416}{2}\right)^1 - 1\right) = 178,208893 \text{ GE}$$

Berechnung monatlicher Zinsertrag mit $i_{nom(m)}$:

$$3.800,00 * \left(1 + \frac{0,09201221612}{12}\right)^6 - 3.800 = 178,208893 \text{ GE}$$

bzw.

$$3.800,00 * \left(\left(1 + \frac{0,09201221612}{12}\right)^6 - 1\right) = 178,208893 \text{ GE}$$

Berechnung täglicher Zinsertrag mit $i_{nom(t)}$:

$$3.800,00 * \left(1 + \frac{0,09167291884}{360}\right)^{180} - 3.800 = 178,208893 \text{ GE}$$

bzw.

$$3.800,00 * \left(\left(1 + \frac{0,09167291884}{360}\right)^{180} - 1\right) = 178,208893 \text{ GE}$$

- Verdeutlichung der Zusammenhänge:

Der zu $i_{eff} = 9,599349\%$ konforme Monatszinssatz ist $i_m = 0,76676846772\%$. Eine Aufzinsung beispielsweise von 1.500 GE über 3 Jahre führt mithin zum selben Endwert:

$$K_n = 1.500 * 1,09599349^3 = 1.974,76391459 \text{ GE}$$

$$K_n = 1.500 * 1,0076676846772^{36} = 1.974,76391459 \text{ GE}$$

Umrechnung des konformen Monatszinssatzes i_m in einen nominellen Jahreszinssatz $i_{nom}(subp')$ führt zu folgendem Ergebnis

$$i_{nom} = i_{subp'} * subp'$$

$$i_{nom}(m) = 0,0076676846772 * 12 = 9,201221612\%$$

Um mit diesem Zinssatz ein Zinsergebnis berechnen zu können, muss $i_{nom}(m)$ zunächst auf den konformen Monatszinssatz zurückgeführt werden und anschließend ist der sich ergebende Zinsfaktor mit der Periodenzahl von 6 Monaten zu exponenzieren:

$$q_{subp} = \left(1 + \frac{i_{nom}(subp')}{subp'}\right)^{subp} =$$

$$q_{subp} = \left(1 + \frac{0,09201221612}{12}\right)^6$$

$$3.800,00 * \left(1 + \frac{0,09201221612}{12}\right)^6 - 3.800 = 178,208893 \text{ GE}$$

Wurde $i_{subp'}$ bei gegebenem i_{eff} anhand der Formel $i_{subp'} = (1 + i_{eff})^{\frac{1}{subp'}} - 1$ berechnet, dann in einen nominellen Jahreszinssatz $i_{nom}(subp')$ umgerechnet und soll dann mit diesem nominellen Jahreszinssatz $i_{nom}(subp')$ ein Zinsergebnis i berechnet werden, muss diese Berechnung mit Hilfe der folgenden Zinsformel erfolgen:

$$q_{subp'} = \left(1 + \frac{i_{nom}(subp')}{subp'}\right)^{subp}$$

- **Soll mit effektiven Jahreszinsen gerechnet werden, ist die Zeit über den Exponent zu berücksichtigen, und zwar in Jahren.**

Soll mit unterjährig Zinsen gerechnet werden, ist zunächst der relative unterjährige Zinssatz zu ermitteln und die Zeit ist über den Exponent zu berücksichtigen, und zwar in Einheiten der Subperiode.

Bei der exponentiellen Verzinsung muss der Exponent immer der Zeiteinheit entsprechen, für die der Zinssatz bestimmt ist, d.h.

Jahreszins -> Jahre

Monatszins -> Monate

Tageszins -> Tage,

wobei die Verzinsungsdauer sowohl ganzzahlige als auch gebrochene Verzinsungsdauern umfassen kann.

3.6. Umrechnung konformer Subperiodenzinssatz in konformen Jahreszinssatz

- Eine Anleihe wird 1,5% Vierteljahreszinssatz verzinst. Wie hoch ist der konforme Jahreszinssatz?

$$i_{eff} = (1 + i_{subp'})^{subp'} - 1$$

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{subp'}\right)^{subp'}$$

$$i_{eff} = (1 + 0,015)^4 - 1 = 6,136355062\%$$

- Rückrechnung

$$i_{subp'} = (1 + i_{eff})^{\frac{1}{subp'}} - 1$$

$$i_q = (1 + 0,06136355062)^{\frac{1}{4}} - 1 = 1,5\%$$

3.7. Verdeutlichung der Zusammenhänge

- Endwert bei jährlicher zinseszinslicher Verzinsung

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^n$$

- Endwert bei unterjährlicher zinseszinslicher Verzinsung

$$K_n^{subp'} = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}(subp')}{subp'}\right)^{subp} = K_0 * (1 + i_{subp})^{subp}$$

- Endwert bei zinseszinslicher Verzinsung mit relativen unterjährlichen Periodenzinssätzen

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^n$$

$$K_n^q = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{4}\right)^q = K_0 * (1 + i_q)^q$$

$$K_n^m = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{12}\right)^m = K_0 * (1 + i_m)^m$$

$$K_n^t = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{360}\right)^t = K_0 * (1 + i_t)^t$$

- Endwert bei zinseszinslicher Verzinsung mit effektivem Jahreszinssatz

$$K_n = K_0 * (1 + i_{eff})^n$$

$$K_n^{subp'} = K_n^q = K_0 * (1 + i_{eff})^{\frac{q}{4}}$$

$$K_n^{subp'} = K_n^m = K_0 * (1 + i_{eff})^{\frac{m}{12}}$$

$$K_n^{subp'} = K_n^t = K_0 * (1 + i_{eff})^{\frac{t}{360}}$$

Im Exponenten stehen immer Jahre, ggf. als gebrochene Jahreszahl.

- Zusammenhänge zwischen dem relativen unterjährigen Periodenzinssatz $i_{subp'}$ und dem effektiven Jahreszinssatz i_{eff}

$$i_{subp'} = (1 + i_{eff})^{\frac{1}{subp'}} - 1 = \sqrt[subp']{1 + i_{eff}} - 1$$

$$i_{eff} = (1 + i_{subp'})^{subp'} - 1$$

$$i_{subp'} = \frac{i_{nom}(subp')}{subp'} = (1 + i_{eff})^{\frac{1}{subp'}} - 1$$

sofern

$$i_{eff} = (1 + i_{subp'})^{subp'} - 1$$

- Beispiel:

- a) Berechne das Endkapital nach einem Jahr bei 100 GE Anfangskapital und $i_{nom} = 12\% p.a.$
- b) Berechne das Endkapital nach einem Jahr bei 100 GE Anfangskapital und $i_m = 1\% pro Monat$ bei zinseszinslicher Verzinsung.
- c) Berechne zu b) den zugehörigen nominellen Jahreszinssatz.
- d) Berechne zu a) den konformen monatlichen Subperiodenzinssatz.
- e) Berechne zu d) den zugehörigen konformen Jahreszinssatz bei monatlicher Zinszahlung.
- f) Berechne zu b) den effektiven Jahreszinssatz.

a) $K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^n$

$$K_n = 100 * (1 + 0,12)^1 = 112,00 GE$$

b) $K_n^m = K_0 * (1 + i_m)^m$

$$K_n^m = 100 * (1 + 0,01)^{12} = 112,682503013 GE$$

c) $i_{nom}(subp') = i_{subp'} * subp'$

$$i_{nom}(subp') = 0,01 * 12 = 12\%$$

d) $i_{subp'} = i_m = (1 + i_{eff})^{\frac{1}{subp'}} - 1$

$$i_m = (1 + 0,12)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,948879293\%$$

Denn:

$$K_n^m = K_0 * (1 + i_m)^m$$

$$K_n^m = 100 * (1 + 0,00948879293)^{12} = 112,00 GE$$

e) $i_{nom}(subp') = i_{subp'} * subp'$

$$i_{nom}(subp') = 0,00948879293 * 12 = 11,386551516\%$$

Denn:

$$K_n^m = K_0 * (1 + i_m)^m$$

$$K_n^m = 100 * \left(1 + \frac{0,11386551516}{12}\right)^{12} = 112,00 GE$$

$$\text{f) } i_{eff} = \left(1 + \frac{i_{nom(sub')}}{subp}\right)^{subp} - 1$$

$$i_{eff} = (1 + 0,01)^{12} - 1 = 12,682503013\%$$

3.8. Besondere Laufzeiten

3.8.1. Verzinsung bei Laufzeiten, die nicht ganzzahligen Vielfachen der Zinsperiode entsprechen

3.8.1.1. Einfache Verzinsung

- In der Praxis ergibt sich oft der Fall, dass ein Kapital bei jährlicher Verzinsung nicht genau 1, 2 oder 3 vollständige Jahre angelegt bleibt, sondern dass sich der Anleger entscheidet, das Kapital z.B. nach 2 Jahren, 4 Monaten und 17 Tagen – also noch 2,381 Jahren – abzuheben. In einem solchen Fall ist die Laufzeit der Kapitalanlage kein ganzzahliges Vielfaches (wie 1, 2 oder 3 ... Jahre) der Zinsperiode.
- **Berechnung des Endkapitals K_n bei Laufzeiten, die nicht ganzzahligen Vielfachen der Zinsperiode entsprechen**

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom} * n)$$

Beispiel:

X hat Y 5.000 GE geliehen, wofür ihm dieser 8% einfache Verzinsung und jederzeitige Rückzahlung des Kapitals auf Abruf zusichert. Nach 2 Jahren, 4 Monaten und 17 Tagen verlangt X sein Kapital zurück. Welchen Betrag muss Y zahlen?

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom} * n)$$

$$K_n = 5.000 * (1 + 0,08 * 2,380\bar{5}) = 5.952,22 \text{ GE}$$

3.8.1.2. Verzinsung mit Zinseszinsen, gemischte Verzinsung

- Zinsen werden in der Bankpraxis üblicherweise nur für vollständig abgelaufene Zinsperioden vergütet, dem bestehenden Kapital zugerechnet und dann in der nächsten Zinsperiode mitverzinst. Für noch nicht abgelaufene Zinsperioden wird bei Abhebung des Kapitals nur eine einfache Verzinsung vorgenommen. Eine derartige teils zinseszinsliche, teils einfache Verzinsung wird **gemischte Verzinsung** genannt.
- Von gemischter Verzinsung wird gesprochen wenn das eingesetzte Kapital für volle Jahre ($= n_1$) exponentiell verzinst wird und für Teilperioden (z.B. Quartale, Monate, Tage) ($= n_2$) nur linear (einfach) verzinst wird.
- **Berechnung des Endkapitals K_n bei gemischter Verzinsung**

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^{n_1} * (1 + i_{nom} * n_2)$$

$$n = n_1 + n_2$$

Zerlegt man die gesamte Laufzeit n in einen ganzzahligen Bestandteil n_1 und einen nicht-ganzzahligen Bestandteil n_2 , wobei $0 \leq n_2 \leq 1$, dann gilt $n = n_1 + n_2$.

- Die Aufzinsung bzw. Abzinsung bei gemischter Verzinsung kann auch durch folgende Formeln dargestellt werden:

$$K_n = K_0 * (1 + i_{ZP})^{n_{ganz}} * (1 + i_{ZP} * n_{gebrochen})$$

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + i_{ZP})^{n_{ganz}} * (1 + i_{ZP} * n_{gebrochen})}$$

- Beispiel 1²:

Ein Anleger überlässt einer Bank 5.000 GE zu 8% jährlichen Zinseszinsen bei 30/360. Nach 2 Jahren, 4 Monaten und 17 Tagen hebt er sein Kapital samt Zinsen ab. Welchen Betrag erhält der Anleger bei gemischter Verzinsung?

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^{n_1} * (1 + i_{nom} * n_2)$$

$$n = n_1 + n_2$$

$$n_1 = 2$$

$$n_2 = \frac{4}{12} + \frac{17}{360} = 0,380\bar{5}$$

$$K_n = 5.000 * (1 + 0,08)^2 * (1 + 0,08 * 0,380\bar{5}) = 6.009,552 \text{ GE}$$

² Helmut Kobelt, Peter Schulte: Finanzmathematik, 8. Auflage, 2006, S. 62.

Hinweis: Unzulässig wäre der Rechenweg $K_n = 5.000 * 1,08^{2,3805} = 6.005,33$ GE, da nur volle Jahre exponentiell verzinst werden dürfen.

- Beispiel 2:

Ein Anleger legt 400,00 GE für vier Jahre und 6 Monate zu 10% p.a. an. Wie hoch ist das Kapital

- a) bei reiner Zinseszinsrechnung,
- b) bei gemischter Verzinsung?

a) $K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^n = 400,00 * (1 + 0,1)^{4,5} = 614,22441$ GE

b) $K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^{n_1} * (1 + i_{nom} * n_2)$

$$n = n_1 + n_2$$

$$n_1 = 4$$

$$n_2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$K_n = 400 * (1 + 0,1)^4 * \left(1 + 0,1 * \frac{1}{2}\right) = 614,922$$
 GE

- Beispiel 3:

X und Y haben jeweils ein Kapital K_0 von 10.000 GE geerbt. Beide wollen ihr Kapital 10 Jahre anlegen mit einem Zinssatz von 10% p.a. X legt sein Geld am 01.01.2007 an, Y legt sein Geld am 01.07.2007 an.

Es ist üblich, unterjährig das Kapital einfach zu verzinsen, sonst zinseszinslich. Das Zinsjahr beginnt am 1. Januar eines Jahres.

Das heißt also, dass ein Kapital, das z.B. am 01.11. eingezahlt wird, vom 01.11. bis 31.12. des Jahres einfach verzinst wird.

Berechne für X und Y das Endkapital. Wie wirkt sich bei Y das Auseinanderfallen von Zinsjahr und Anlagejahr aus?

Endkapital des X:

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^n$$

$$K_{10} = 10.000 * (1 + 0,1)^{10} = 25.937,424601$$
 GE

Endkapital des Y:

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^{n_1} * (1 + i_{nom} * n_2)$$

$$\bar{K}_0 = K_0 + K_{0,5} = 10.000 + 500 = 10.500 \text{ GE}$$

$$n_1 = 9$$

$$n_2 = \frac{1}{2}$$

$$K_n = 10.500 * (1 + 0,1)^9 * \left(1 + 0,1 * \frac{1}{2}\right) = 25.996,373293 \text{ GE}$$

Y generiert über einen 10-jährigen Anlagezeitraum 58,948692 GE mehr als X.

3.8.2. Stetige Verzinsung

- Ein Kapital wächst umso schneller, je öfter die Zinserträge ausgezahlt werden und in die Zinseszinsrechnung mit einfließen. Erfolgt die Verzinsung bei infinitesimal kleinen Zinsperioden, handelt es sich um stetige Verzinsung – in Abgrenzung zur diskreten Verzinsung.
- **Berechnung des Endkapitals bei stetiger (= organischer) Verzinsung**

$$K_n = K_0 * e^{i_{nom} * n}$$

$e = \text{Eulersche Zahl} = 2,71828182846...$

- **Herleitung der Eulerschen Zahl e**

Der Logarithmus zur Basis e heißt natürlicher Logarithmus (= Logarithmus naturalis). Statt $\log_e b$ schreibt man meist $\ln b$.

e ist die Eulersche Zahl.

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 * 2} + \frac{1}{1 * 2 * 3} + \frac{1}{1 * 2 * 3 * 4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2,71828182846...$$

$n! = n \text{ Fakultät}$

bzw.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Hintergrund der Eulerschen Zahl e :

Nach der Zinseszinsformel wird aus dem Startkapital K_0 nach n Verzinsungen mit dem Zinssatz i_{nom} das Kapital

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^n$$

Es seien $K_0 = 1$ und $i_{nom} = 100\% = 1$, wenn der Zinszuschlag jährlich erfolgt, oder $i_{nom} = \frac{1}{n}$, wenn der Zinszuschlag n -mal im Jahr erfolgt, also bei unterjährlicher Verzinsung.

Bei jährlichem Zuschlag gilt

$$K_1 = 1 * (1 + 1)^1 = 2$$

Bei halbjährlichem Zuschlag ist $i_{nom} = \frac{1}{2}$ und es gilt

$$K_2 = 1 * \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$$

Bei monatlichem Zuschlag ist $i_{nom} = \frac{1}{12}$ und es gilt

$$K_{12} = 1 * \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2,61303529022$$

Bei täglichem Zuschlag ist $i_{nom} = \frac{1}{365}$ und es gilt

$$K_{365} = 1 * \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2,71456748193 \dots$$

Wenn die Verzinsung kontinuierlich in jedem Augenblick erfolgt, wird n unendlich groß, und man erhält e .

- **Herleitung der Endwertformel bei stetiger Verzinsung**

Bei diskreter Verzinsung mit m Zinsperioden pro Jahr lautet die Formel für das Endkapital K_n nach n Jahren bei einem Anfangskapital K_0 und einem Nominalzinssatz i_{nom} :

$$K_n(diskret) = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^{m*n}$$

Um von der diskreten zur stetigen Verzinsung zu gelangen, lässt man die Häufigkeit der Zinsgutschriften m über alle Grenzen wachsen ($m \rightarrow \infty$). Das Kapital wird also unendlich oft pro Jahr verzinst

$$K_n(stetig) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^{m*n} \right)$$

$$K_n(stetig) = K_0 * \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^{m*n}$$

Für die Eulersche Zahl e gilt:

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Substitution von $x = \frac{m}{i_{nom}}$ führt zu:

$$e = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^{\frac{m}{i_{nom}}}$$

$$K_n(stetig) = K_0 * \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^{m*n}$$

$$K_n(\text{stetig}) = K_0 * \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^{\frac{m}{i_{nom}} * n * i_{nom}}$$

$$K_n(\text{stetig}) = K_0 * e^{n * i_{nom}}$$

$$K_n(\text{stetig}) = K_n = K_0 * e^{i_{nom} * n}$$

$$e^{i_{nom} * n} = \left(\frac{K_n}{K_0}\right) | \ln$$

$$\ln(e^{i_{nom} * n}) = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$$

$$\ln((e^{i_{nom}})^n) = \ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)$$

$$n * \ln(e^{i_{nom}}) = \ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)$$

$$n * i_{nom} = \ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)$$

$$i_{nom} = \frac{1}{n} * \ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = \frac{1}{n} * (\ln(K_n) - \ln(K_0))$$

- Beispiel 1:

Ein Anfangskapital von 1.000 GE wird bei einem nominellen Jahreszinssatz von 5% über einen Zeitraum von 10 Jahren stetig verzinst. Berechne das Endkapital.

$$K_n = K_0 * e^{i_{nom} * n}$$

$$K_n = 1.000 * e^{0,05 * 10} = 1.648,7212707 \text{ GE}$$

- Beispiel 2:

- (i) Ein Kapital von 1.000 GE wird bei täglicher Verzinsung zu einem nominellen Jahreszinssatz von 6% angelegt. Wie hoch ist das Endkapital nach 2 Jahren und 4 Monaten?
- (ii) Ein Kapital von 1.000 GE wird bei stündlicher Verzinsung zu einem nominellen Jahreszinssatz von 6% angelegt. Wie hoch ist das Endkapital nach 2 Jahren und 4 Monaten?
- (iii) Ein Kapital von 1.000 GE wird bei minütlicher Verzinsung zu einem nominellen Jahreszinssatz von 6% angelegt. Wie hoch ist das Endkapital nach 2 Jahren und 4 Monaten?

- (iv) Ein Kapital von 1.000 GE wird bei stetiger Verzinsung zu einem nominellen Jahreszinssatz von 6% angelegt. Wie hoch ist das Endkapital nach 2 Jahren und 4 Monaten?

(i)

$$K_n^t = K_0 * (1 + i_t)^t = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{360}\right)^t$$

$$K_n^t = 1.000 * \left(1 + \frac{0,06}{360}\right)^{840} = 1.150,2603805 \text{ GE}$$

(ii)

$$K_n^h = K_0 * (1 + i_h)^h = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{8.640}\right)^t$$

$$K_n^h = 1.000 * \left(1 + \frac{0,06}{8.640}\right)^{20.160} = 1.150,27323867 \text{ GE}$$

(iii)

$$K_n^{min} = K_0 * (1 + i_{min})^{min} = K_0 * \left(1 + \frac{i_{nom}}{518.400}\right)^t$$

$$K_n^{min} = 1.000 * \left(1 + \frac{0,06}{518.400}\right)^{1.209.600} = 1.150,27373285 \text{ GE}$$

(iv)

$$K_n = K_0 * e^{i_{nom} * n}$$

$$K_n = 1.000 * e^{0,06 * \left(2 + \frac{4}{12}\right)} = 1.150,27379886 \text{ GE}$$

- **Umrechnung zwischen nominellem Jahreszinssatz i_{nom} und stetigem Jahreszinssatz i_{stetig}**

$$K_n = K_0 * e^{i_{nom} * n}$$

$$K_n = K_0 * e^{i_{stetig} * n}$$

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^n$$

$$1 + i_{nom} = e^{i_{stetig}}$$

$$i_{nom} = e^{i_{stetig}} - 1$$

$$i_{nom} = e^{i_{stetig}} - 1$$

$$e^{i_{stetig}} = 1 + i_{nom} \quad | \ln$$

$$\ln(e^{i_{stetig}}) = \ln(1 + i_{nom})$$

$$i_{stetig} = \ln(1 + i_{nom})$$

Beispiel 1:

Welchem nominellen Jahreszinssatz entspricht ein stetiger Zinssatz von 5%?

$$i_{nom} = e^{i_{stetig}} - 1$$

$$i_{nom} = e^{0,05} - 1 = 5,127109637\%$$

Beispiel 2:

Welchem stetigen Zinssatz entspricht ein nomineller Jahreszins von 5%?

$$i_{stetig} = \ln(1 + i_{nom})$$

$$i_{stetig} = \ln(1 + 0,05) = 4,879016416\%$$

- **Umrechnung des nominellen Jahreszinssatzes i_{nom} bei stetiger Verzinsung in einen effektiven Jahreszinssatz i_{eff}**

$$K_n = K_0 * e^{i_{nom} * n}$$

$$K_n = K_0 * (1 + i_{eff})^n$$

$$1 + i_{eff} = e^{i_{nom}}$$

$$i_{eff} = e^{i_{nom}} - 1$$

$$i_{eff} = e^{i_{nom}} - 1$$

$$e^{i_{nom}} = i_{eff} + 1 \quad | \ln$$

$$\ln(e^{i_{nom}}) = \ln(1 + i_{eff})$$

$$i_{nom} = \ln(1 + i_{eff})$$

Beispiel 1:

Welchem effektivem Jahreszins entspricht ein nomineller Jahreszinssatz von 5% bei stetiger Verzinsung?

$$i_{eff} = e^{i_{nom}} - 1$$

$$i_{eff} = e^{0,05} - 1 = 5,127109637\%$$

Beispiel 2:

Welchem nominellen Jahreszinssatz bei stetiger Verzinsung entspricht ein effektiver Jahreszinssatz von 5,127109637%?

$$i_{nom} = \ln(1 + i_{eff})$$

$$i_{nom} = \ln(1 + 0,05127109637) = 5\%$$

3. Unterjährliche Rentenzahlungen

3.1. Nachschüssige unterjährliche Rentenzahlungen bei jährlich-nachschüssiger Verzinsung

- Typische Problemstellung: Ein Sparer zahlt jeweils am Ende eines Vierteljahres je 100 EUR auf ein Sparkonto. Die Bank gewährt 8% Jahreszinsen. Auf welchen Betrag ist das Kapital nach einem Jahr bzw. nach fünf Jahren gewachsen?

Die Rentenperiode (hier 3 Monate) und die Zinsperiode (hier 12 Monate) sind unterschiedlich lang. Daher müssen die Renten- und die Zinsperioden einander rechnerisch angeglichen werden, indem man zunächst den Wert aller Rentenraten einschließlich der Zinsen zum Ende eines Jahres ermittelt. Dieser Jahresrentenwert wird als **jahreskonforme Ersatzrentenrate** r_e bezeichnet.

- Die im Laufe eines Jahres mehrfach eingezahlten Rentenraten werden nicht mit Zinseszinsen, sondern nur mit einfachen Zinsen verzinst:

$$K_n = K_0 * \left(1 + m * \frac{i_{nom}}{12}\right)$$

Das Kapital des Sparers ist somit bis zum Jahresende auf folgenden Betrag angewachsen:

$$\begin{aligned} K_n = & 100 * \left(1 + 9 * \frac{0,08}{12}\right) + \\ & 100 * \left(1 + 6 * \frac{0,08}{12}\right) + \\ & 100 * \left(1 + 3 * \frac{0,08}{12}\right) + \\ & 100 * \left(1 + 0 * \frac{0,08}{12}\right) = 412,00 \text{ EUR} = \text{Jahreskonforme Ersatzrentenrate } r_e \end{aligned}$$

- **Berechnung der jahreskonformen Ersatzrentenrate r_e bei unterjährlich nachschüssiger Zahlungsweise**

$$r_e = r * \left(c + \frac{i_{nom}}{2} * (c - 1)\right)$$

c = Zahl der Rentenraten pro Jahr

$$r_e = 100 * \left(4 + \frac{0,08}{2} * (4 - 1)\right) = 412,00 \text{ EUR}$$

- Der Betrag von 412,00 EUR wird jährlich-nachschüssig mit Zinseszinsen verzinst, und zwar erstmals am Ende des 2. Jahres. Der Betrag von 412,00 EUR ergibt

sich am Ende eines jeden Jahres, wenn der Sparer seine Einzahlungen über mehrere Jahre fortsetzt. Der Betrag von 412,00 EUR ist die jahreskonforme Ersatzrentenrate.

Will man nun wissen, auf welchen Betrag das Kapital des Sparers nach Ablauf von 5 Jahren angewachsen ist, wenn er 5 Jahre lang vierteljährlich-nachschüssig je 100 EUR einzahlt, dann kann in der Formel für den Endbetrag der n-mal nachschüssig zahlbaren Zeitrente die Rentenrate r durch die jahreskonforme Ersatzrentenrate r_e ersetzt werden.

$$R_n = \frac{r_e * (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$R_5 = \frac{412 * (1,08^5 - 1)}{1,08 - 1} = 2.417,03959552 \text{ EUR}$$

Für die Ermittlung des Endkapitals (= Rentenendwert) bei unterjährlich-nachschüssiger Rentenzahlung ist es somit gleichbedeutend, ob der Sparer vierteljährlich-nachschüssig je 100 EUR einzahlt oder jährlich-nachschüssig 412 EUR. In beiden Fällen erreicht er nach Ablauf von 5 Jahren das gleiche Endkapital (= Rentenendwert).

- Beispiel:

Auf ein Spargbuch mit einer Verzinsung von 5% p.a. werden quartalsweise nachschüssig 100 EUR eingezahlt. Wie hoch ist das Endkapital nach 10 Jahren?

$$r_e = r * \left(c + \frac{i_{nom}}{2} * (c - 1) \right)$$

$$r_e = 100 * \left(4 + \frac{0,05}{2} * (4 - 1) \right) = 407,50 \text{ EUR}$$

$$R_n = \frac{r * (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$R_n = \frac{407,5 * (1,05^{10} - 1)}{1,05 - 1} = 5.125,49120824 \text{ EUR}$$

4. Tilungsgewichteter Zinssatz

- Typischer Anwendungsfall eines tilungsgewichteten Zinssatzes bei Entscheidung über Nichtabnahme eines Annuitätendarlehens gegen Ausgleich des Nichtabnahmeschadens bzw. Ablösung eines Annuitätendarlehens gegen Vorfälligkeitsentschädigung oder vertragsgemäße Abnahme bzw. Tilgung.

Ein Nichtabnahmeschaden bzw. eine Vorfälligkeitsentschädigung wird begründet mit einer Differenz zwischen dem vereinbarten Vertragszins und dem Wiederanlagezins für laufzeitkongruente Kapitalmarkttitel.

Je höher der Wiederanlagezins, umso niedriger der Barwert der Kapitalrückflüsse, umso niedriger der Nichtabnahmeschaden bzw. die Vorfälligkeitsentschädigung.

- Die Summe aus Restschuld und Vorfälligkeitsentschädigung wird dem mit einem tilungsgewichteten Zinssatz diskontierten Annuitätenzahlungen gegenübergestellt. Ist der so berechnete Barwert der Annuitätenzahlungen kleiner als die Summe aus Restschuld und Vorfälligkeitsentschädigung, sollte das Annuitätendarlehen nicht abgelöst werden.
- Jede Annuität müsste grundsätzlich mit einem anderen Zinssatz entsprechend der Zinsstrukturkurve abgezinst werden. Um einen einheitlichen Kalkulationszinssatz heranziehen zu können, wird in der Praxis ein tilungsgewichteter Zinssatz verwendet. Ein tilungsgewichteter Zinssatz ist ein spezieller Durchschnittszinssatz. Bei der Berechnung dieses Durchschnittszinssatzes werden die Zinssätze der hinteren Laufzeiten höher gewichtet, denn in den hinteren Laufzeiten fallen tendenziell höhere Tilgungsbeträge an. Das Kapital dieser höheren Tilgungsbeträge ist zu den jeweiligen Zinssätzen länger gebunden.
- Berechnung eines tilungsgewichteten Zinssatzes
 - (i) Multiplikation der jährlichen Tilgungsbeträge einer Annuität mit den zugehörigen Laufzeitjahren.
 - (ii) Multiplikation der unter (i) ermittelten Produkte mit den jeweiligen Zinssätzen entsprechend der Zinsstrukturkurve.
 - (iii) Ermittlung der Summen zu (i) und (ii).
 - (iv)
$$\text{Tilungsgewichteter Zinssatz} = \frac{\sum (\text{Tilgungsbetrag} * \text{Laufzeitjahr} * \text{Zinssatz gem. Zinsstrukturkurve})}{\sum (\text{Tilgungsbetrag} * \text{Laufzeitjahr})}$$
- Bei endfälligen Krediten macht die Berechnung eines tilungsgewichteten Zinssatzes keinen Sinn. Der tilungsgewichtete Zins wäre hier mit dem Kreditzinssatz identisch. Der Barwert eines endfälligen Kredites entspricht grundsätzlich dem Kreditbetrag.

- Beispiel 1:

Ein Bundesland hat per 15.06.2000 ein Annuitätendarlehen über 142.000.000 EUR abzunehmen.

Konditionen:

-> 8,49% p.a.

-> Jährlich nachschüssige Annuitäten

-> Laufzeit bis zum 15.06.2015

Der Darlehensvertrag wurde bereits 1995 während einer Hochzinsphase abgeschlossen. Am 15.06.2000 liegt das Zinsniveau unter 8,49%.

Das Bundesland hat die Möglichkeit, den Kredit zu kündigen oder abzunehmen. Bei einer Kündigung wäre ein Nichtabnahmeschaden i.H.v. 31.500.000 EUR zu zahlen.

Für das Bundesland lassen sich per 15.06.2000 folgende Zinssätze für endfällige Darlehen benennen:

Restlaufzeit [Jahre]	Zinssatz [%]
1	5,02
2	5,33
3	5,50
4	5,62
5	5,71
6	5,79
7	5,85
8	5,91
9	5,95
10	5,98
11	6,01
12	6,03
13	6,05
14	6,07
15	6,09

Lohn sich die Verwendung des Annuitätendarlehens als allgemeiner Haushaltskredit?

Lösungshinweise:

(1) Zur Ermittlung einer etwaigen Vorteilhaftigkeit einer Verwendung des Annuitätendarlehens als Haushaltskredit ist in einem ersten Schritt der Barwert der Annuitäten zu ermitteln. Als Diskontierungsfaktor ist dabei der zu berechnende tilgungsgewichtete Zinssatz heranzuziehen.

Für die Aufgabenstellung gilt:

Barwert der Annuitäten = 166.155.321,18 EUR.

(2) In einem zweiten Schritt ist die Summe aus dem Darlehensbetrag und der Vorfälligkeitsentschädigung zu ermitteln.

Grund: Will man den Darlehensbetrag alternativ über gewöhnliche Kommunalkredite aufbringen, wenn mal also auf das Annuitätendarlehen verzichten will, muss man 31.500.000,00 EUR "Vorfälligkeitsentschädigung" zahlen.

Für die Aufgabenstellung gilt:

$$142.000.000,00 \text{ EUR} + 31.500.000,00 \text{ EUR} = 173.500.000,00 \text{ EUR}$$

(3) Abschließend ist in einem dritten Schritt der Barwert der Annuitäten der Summe aus dem Darlehensbetrag und der Vorfälligkeitsentschädigung gegenüberzustellen. Ist die Differenz negativ, so sollte das Annuitätendarlehen nicht abgelöst werden.

Für die Aufgabenstellung gilt:

$$166.155.321,18 \text{ EUR} - 173.500.000,00 \text{ EUR} = -7.344.678,82 \text{ EUR}$$

Das Annuitätendarlehen sollte in Anspruch genommen werden.

Tabellarische Lösung:

Überprüfung der Vorteilhaftigkeit der Ablösung eines Annuitätendarlehens										
Restschuld [EUR]:				142.000.000						
Nominaler Zinssatz Annuitätendarlehen:				8,49%						
Jährliche Annuität:				17.089.440,68						
Termin für Schuldendienst	Annuität	Zinsen	Tilgung	Restschuld	Laufzeitjahr	Tilgungsbetrag * Laufzeitjahr	Zinssätze gem. Zinsstrukturkurve	Tilgungsbetrag * Laufzeitjahr * Zinssatz	Tilgungsgewichteter Zinssatz	Barwert
15.06.2000	0,00	0,00	0,00	142.000.000,00	0	0,00		0,00	5,9835615062%	0,00
15.06.2001	17.089.440,68	12.055.800,00	5.033.640,68	136.966.359,32	1	5.033.640,68	5,02%	252.688,76	5,9835615062%	16.124.614,46
15.06.2002	17.089.440,68	11.628.443,91	5.460.996,78	131.505.362,54	2	10.921.993,55	5,33%	582.142,26	5,9835615062%	15.214.259,86
15.06.2003	17.089.440,68	11.164.805,28	5.924.635,40	125.580.727,14	3	17.773.906,21	5,50%	977.564,84	5,9835615062%	14.355.301,56
15.06.2004	17.089.440,68	10.661.803,73	6.427.636,95	119.153.090,19	4	25.710.547,80	5,62%	1.444.932,79	5,9835615062%	13.544.837,86
15.06.2005	17.089.440,68	10.116.097,36	6.973.343,33	112.179.746,86	5	34.866.716,63	5,71%	1.990.889,52	5,9835615062%	12.780.130,87
15.06.2006	17.089.440,68	9.524.060,51	7.565.380,17	104.614.366,69	6	45.392.281,05	5,79%	2.628.213,07	5,9835615062%	12.058.597,28
15.06.2007	17.089.440,68	8.881.759,73	8.207.680,95	96.406.685,73	7	57.453.766,66	5,85%	3.361.045,35	5,9835615062%	11.377.799,64
15.06.2008	17.089.440,68	8.184.927,62	8.904.513,06	87.502.172,67	8	71.236.104,51	5,91%	4.210.053,78	5,9835615062%	10.735.438,10
15.06.2009	17.089.440,68	7.428.934,46	9.660.506,22	77.841.666,45	9	86.944.556,01	5,95%	5.173.201,08	5,9835615062%	10.129.342,65
15.06.2010	17.089.440,68	6.608.757,48	10.480.683,20	67.360.983,24	10	104.806.832,02	5,98%	6.267.448,55	5,9835615062%	9.557.465,81
15.06.2011	17.089.440,68	5.718.947,48	11.370.493,21	55.990.490,04	11	125.075.425,26	6,01%	7.517.033,06	5,9835615062%	9.017.875,67
15.06.2012	17.089.440,68	4.753.592,60	12.335.848,08	43.654.641,96	12	148.030.176,95	6,03%	8.926.219,67	5,9835615062%	8.508.749,42
15.06.2013	17.089.440,68	3.706.279,10	13.383.161,58	30.271.480,38	13	173.981.100,55	6,05%	10.525.856,58	5,9835615062%	8.028.367,13
15.06.2014	17.089.440,68	2.570.048,68	14.519.392,00	15.752.088,38	14	203.271.487,99	6,07%	12.338.579,32	5,9835615062%	7.575.106,00
15.06.2015	17.089.440,68	1.337.352,30	15.752.088,38	0,00	15	236.281.325,70	6,09%	14.389.532,73	5,9835615062%	7.147.434,84
						1.346.779.861,58		80.585.401,37	Barwert:	166.155.321,18
									Tilgungsgewichteter Zinssatz:	5,9835615062%
Summe aus Restschuld und Vorfälligkeitsentschädigung: 142.000.000 EUR + 31.500.000 EUR = 173.500.000,00 EUR										
Barwert der Annuitäten: 166.155.321,18 EUR										
166.155.321,18 € < 173.500.000,00 € => Das Annuitätendarlehen sollte nicht abgelöst werden.										