

Dipl.-Kfm. Ansgar Ostermann

Grundwissen Stochastik für die Wertpapieranalyse



Vorwort

Seit vielen Jahren bin ich im Handel mit High Yield Bonds aktiv, dem ohne Anwendung mathematischer Methoden ein wesentliches Fundament fehlen würde. Es entstand daher die Idee, ausgewählte elementare Grundlagen der Stochastik, also der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, in einem Skript zusammenzufassen.

Das vorliegende Skript führt in jene Grundlagen der Stochastik ein, die erforderlich sind, um die wissenschaftliche Fachliteratur zur Wertpapieranalyse nachvollziehen zu können. Es steht dabei nicht der mathematische Formalismus im Vordergrund, sondern die Verdeutlichung von Rechentechniken.

Ich freue mich über Anregungen, Kritik, Fehlerhinweise und Verbesserungsvorschläge, die Sie an folgende E-Mail-Adresse richten können:

ieff-professional@freenet.de

Berlin, im Oktober 2026
Ansgar Ostermann

Gliederung

1. Mittelwerte

- 1.1. Grundlagen
- 1.2. Modalwert
- 1.3. Median
- 1.4. Arithmetisches Mittel
- 1.5. Geometrisches Mittel
- 1.6. Harmonisches Mittel
- 1.7. Durchschnittliche absolute und durchschnittliche relative Änderung von Zahlenreihen
- 1.8. Übungsaufgaben zu Mittelwerten

2. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

- 2.1. Definition der Wahrscheinlichkeit nach Laplace
- 2.2. Additionsgesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung
- 2.3. Bedingte Wahrscheinlichkeit
- 2.4. Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses
- 2.5. Unabhängige Ereignisse
- 2.6. Multiplikationsgesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung
- 2.7. Signifikanz

3. Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- 3.1. Zufallsvariablen
- 3.2. Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsvariablen
- 3.3. Wahrscheinlichkeitsverteilungen stetiger Zufallsvariablen
- 3.4. Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
 - 3.4.1. Erwartungswert
 - 3.4.2. Varianz und Standardabweichung
- 3.5. Mehrdimensionale Wahrscheinlichkeiten
 - 3.5.1. Grundlagen
 - 3.5.2. Randverteilung
 - 3.5.3. Bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung
 - 3.5.4. Erwartungswert, Varianz, Kovarianz, Korrelationskoeffizient
 - 3.5.5. Unabhängigkeit
- 3.6. Gesetz der großen Zahlen
- 3.7. Übungsaufgaben zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen

4. Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- 4.1. Binominalverteilung
- 4.2. Geometrische Verteilung
- 4.3. Hypergeometrische Verteilung
- 4.4. Poissonverteilung

5. Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- 5.1. Gleichverteilung
- 5.2. Exponentialverteilung
- 5.3. Normalverteilung
- 5.4. Logarithmische Normalverteilung
- 5.5. Chi-Quadrat-Verteilung
- 5.6. Studentverteilung

6. Schiefe

7. Konfidenzintervalle

8. Regressionsanalyse

9. Grundlagen der Integralrechnung

1. Mittelwerte

1.1. Grundlagen

- Die Mittelwerte gehören zu einer wichtigen Klasse von Parametern, den Lageparametern. Sie geben Auskunft über die Lage einer Verteilung auf der verwendeten Skala (= x-Achse).
- Die wichtigsten **Mittelwerte** sind:
 - (i) Modalwert
 - (ii) Median
 - (iii) Arithmetisches Mittel
 - a) Ungewogenes arithmetisches Mittel
 - b) Gewogenes arithmetisches Mittel, Gewichtung mit relativen Häufigkeiten
 - c) Gewogenes arithmetisches Mittel, Gewichtung mit absoluten Häufigkeiten
 - (iv) Geometrisches Mittel
 - a) Ungewogenes geometrisches Mittel
 - b) Gewogenes geometrisches Mittel
 - (v) Harmonisches Mittel
 - a) Ungewogenes harmonische Mittel
 - b) Gewogenes harmonisches Mittel

1.2. Modalwert

- Der Modalwert $\bar{x}_D$ (= Modus, häufigster Wert) ist der Wert in einem Datensatz, der am häufigsten vorkommt. Er ist ein Lageparameter der deskriptiven Statistik, der bei nominalskalierten, ordinalskalierten und metrisch skalierten Daten bestimmt werden kann. Es können mehrere Modalwerte existieren, wenn verschiedene Werte gleich häufig auftreten (bimodale Verteilung, multimodale Verteilung).
- Bestimmung des Modalwertes erfolgt durch einfaches Abzählen der Häufigkeiten.

Beispiel:

In der Datenreihe

1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5

ist der Modalwert $\bar{x}_D = 4$, da er am häufigsten vorkommt.

- **Nominalskalierte Daten**

Bei nominalskalierten Daten (= nominale Daten) handelt es sich um Daten, die in keinerlei Reihenfolge gebracht werden können – beispielsweise Geschlecht, Haarfarbe, Telefonnummer. Feststellbar ist hier lediglich, ob zwei statistische Einheiten im Hinblick auf ein nominalskaliertes Merkmal die gleichen Ausprägungen aufweisen – d.h. ob etwa beide befragten Personen blond sind oder ob sie über unterschiedliche Haarfarben verfügen. Die Analyse nominaler Daten erfolgt über Häufigkeiten (= Anzahl) und den Modalwert (= häufigster Wert).

Beispiele:

Farben:	rot, blau, grün
Nationalität:	deutsch, französisch, spanisch
Beruf:	Lehrer, Ingenieur, Arzt
Familienstand:	ledig, verheiratet, geschieden
Postleitzahlen:	10117, 12435, 37671

- **Ordinalskalierte Daten**

Bei ordinalskalierten Daten (= ordinale Daten) handelt es sich um Daten, die zwar in eine Reihenfolge gebracht werden können ("*größer als*", "*besser als*", ...), da allerdings die Abstände zwischen den einzelnen Werten nicht quantifizierbar sind, kann mit ihnen nicht gerechnet werden, obwohl es sich auf den ersten Blick um "*normale Zahlen*" handelt. Typische Beispiele sind Ranglisten, Schulnoten, Zufriedenheits-Skalen, Dienstgrade.

Beispiele:

Ranglisten:	erster Platz, zweiter Platz, dritter Platz
Schulnoten:	1, 2, 3, 4, 5, 6
Zufriedenheit:	sehr zufrieden, zufrieden, unzufrieden
Schulabschluss:	Hauptschule, Realschule, Abitur

Gütekategorie: A, B, C

- **Metrisch skalierte Daten**

Bei metrischen Daten (auch Kardinaldaten) handelt es sich um Daten, die quantitativ messbare Abstände bzw. Merkmalsausprägungen haben. Sie erlauben präzise Berechnungen (Mittelwert, Standardabweichung, ...).

Beispiele:

Länge, Volumen, Gewicht, Temperatur, Preis, Zeitdauer, ...

- Beispiel:

368 Studenten beurteilen ihre Berufsaussichten.

Möglichkeiten: sehr gut, gut, mittelmäßig, schlecht, sehr schlecht, keine Meinung.

Die meisten Studenten (124) beurteilen ihre Berufsaussichten als sehr schlecht.

Der Modalwert lautet: sehr schlecht.

1.3. Median

- Der Median $\bar{x}_Z$ (= Zentralwert) ist der mittlere Wert in einer Folge von nach aufsteigender Größe sortierten Werten. Ober- bzw. unterhalb des Median liegt jeweils die Hälfte der Werte. Gegenüber dem arithmetischen Mittelwert ist der Median robuster gegenüber Ausreißern.
- Jede Merkmalsausprägung eines wenigstens ordinal messbaren Merkmals, die die geordnete Reihe der Beobachtungswerte in zwei gleiche Teile zerlegt, heißt Median.
- Gibt es n geordnete Beobachtungswerte und ist n eine ungerade Zahl, so gibt es einen Median:

$$\bar{x}_Z = x_{\frac{n+1}{2}}$$

Beispiel:

Bei einer Klausur wurden von 7 Teilnehmern folgende (geordnete) Punktezahlen erzielt:

8; 8; 11; 15; 20; 26; 30

Berechne den Median.

$$\bar{x}_Z = 15$$

- Gibt es n geordnete Beobachtungswerte und ist n eine gerade Zahl, so kommen alle Werte zwischen $x_{\frac{n}{2}}$ und $x_{\frac{n}{2}+1}$ als Median infrage. Üblicherweise verwendet man allerdings den Mittelwert der beiden mittleren geordneten Beobachtungswerte als Median.

Beispiel:

8 Weitspringer erreichen folgende Sprungweiten [m]:

4,60; 4,80; 4,80; 4,90; 5,00; 5,00; 5,10; 5,30

Berechne den Median.

$$\bar{x}_Z = \frac{4,90 \text{ m} + 5,00 \text{ m}}{2} = 4,95 \text{ m}$$

- Unterscheide:

Modus: Der am häufigsten vorkommende Wert.

Median: Der Wert in der Mitte.

Mittelwert: Der Durchschnitt (Summe aller Werte geteilt durch Anzahl).

1.4. Arithmetisches Mittel

- Das arithmetische Mittel $\bar{x}_A$ (= Durchschnitt) beschreibt den Durchschnittswert einer Datenmenge.
- Die Bestimmung des arithmetischen Mittels ist nur sinnvoll für Merkmale, die auf einer metrischen Skala gemessen werden.
- **Ungewogenes arithmetisches Mittel**

Das ungewogene arithmetische Mittel $\bar{x}_{AU}$ erhält man, indem man die Summe aller Einzelwerte einer Datenreihe durch die Anzahl n der Einzelwerte dividiert. Die Einzelwerte werden nicht durch Gewichtungsfaktoren ergänzt.

Gegeben seien n Einzelwerte x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) eines Merkmals X . Für das ungewogene arithmetische Mittel gilt dann:

$$\bar{x}_{AU} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

x_i = Einzelwert i

$i = 1; 2; 3 \dots$

n = Anzahl der Einzelwerte

Beispiel:

Herr Meyer hat an 7 Tagen einer Woche folgende Mengen Bier getrunken (in Litern):

0,7; 1,6; 2,5; 3,2; 1,6; 2,4; 2,8

Berechne den durchschnittlichen Bierkonsum als arithmetische Mittel.

$$\bar{x}_{AU} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\bar{x}_{AU} = \frac{0,7 + 1,6 + 2,5 + 3,2 + 1,6 + 2,4 + 2,8}{7} = 2,114286 \frac{\text{Liter}}{\text{Tag}}$$

- **Gewogenes arithmetisches Mittel, Gewichtung mit relative Häufigkeiten**

Das einfache arithmetische Mittel muss erforderlichenfalls um relative Häufigkeiten erweitert werden, wenn die Einzelwerte unterschiedliche Relevanz haben und einzelnen Werten somit ein stärkerer Einfluss auf den Mittelwert zukommen muss. Das um relative Häufigkeiten erweiterte gewogene arithmetische Mittel $\bar{x}_{AGR}$ erhält man, indem man die Einzelwerte einer Datenreihe mit einer relativen Häufigkeit gewichtet und anschließend addiert.

$$\bar{x}_{AGR} = x_1 * h_1 + x_2 * h_2 + \dots + x_n * h_n = \sum_{i=1}^n x_i * h_i$$

$x_i = \text{Einzelwert } i$

$h_i = \text{relative Häufigkeit des Einzelwertes } x_i \text{ mit } h_i \leq 1 \wedge \sum_{i=1}^n h_i = 1$

Die Berechnung eines um relative Häufigkeiten erweiterten arithmetischen Mittels $\bar{x}_{AR}$ kann beispielsweise erforderlich sein, wenn das im Jahresdurchschnitt eingesetzte Kapital berechnet werden soll, welches im Laufe des Jahres in verschiedenen Assets unterschiedlich lange gebunden ist. Die Summe der Gewichtungsfaktoren ist in diesem Fall die Zahl der Tage eines Jahres.

Beispiel:

Herr Meyer hat während eines Jahres folgende Aktien besessen:

360 Tage lang Aktien für insgesamt 4.000 EUR der X AG mit Anschaffungskosten in Höhe von 4.000 EUR.

40 Tage lang Aktien für insgesamt 2.000 EUR der Y AG mit Anschaffungskosten in Höhe von 2.000 EUR.

200 Tage lang Aktien für insgesamt 3.000 EUR der Z AG mit Anschaffungskosten in Höhe von 3.000 EUR.

Berechne das im Jahresdurchschnitt eingesetzte Kapital.

$$\bar{x}_{AGR} = \sum_{i=1}^n x_i * h_i$$

$$\bar{x}_{AGR} = 4.000 \text{ EUR} * \frac{360}{360} + 2.000 \text{ EUR} * \frac{40}{360} + 3.000 \text{ EUR} * \frac{200}{360}$$

$$\bar{x}_{AGR} = \frac{4.000 \text{ EUR} * 360 + 2.000 \text{ EUR} * 40 + 3.000 \text{ EUR} * 200}{360}$$

$$\bar{x}_{AGR} = 5.888, \bar{8} \text{ EUR}$$

- **Gewogenes arithmetischen Mittel, Gewichtung mit absoluten Häufigkeiten**

Das einfache arithmetische Mittel muss erforderlichenfalls um absolute Häufigkeiten erweitert werden, wenn die Einzelwerte unterschiedliche Relevanz haben und einzelnen Werten somit ein stärkerer Einfluss auf den Mittelwert zukommen muss. Das um absolute Häufigkeiten erweiterte gewogene arithmetische Mittel $\bar{x}_{AGA}$ erhält man, indem man die Einzelwerte einer Datenreihe mit einer absoluten Häufigkeit gewichtet, anschließend addiert und diese Summe durch die Summe der absoluten Häufigkeiten dividiert.

$$\bar{x}_{AGA} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i * h_i}{\sum_{i=1}^n h_i}$$

x_i = Einzelwert i

h_i = absolute Häufigkeit des Einzelwertes x_i

Beispiel 1:

Während eines halben Jahres (= 120 Arbeitstage) wird täglich im Rahmen einer Untersuchung über den Publikumsverkehr beim Sozialamt die Anzahl der persönlich vorsprechenden Antragsteller festgehalten. Folgende Häufigkeitsverteilung hat sich ergeben:

Anzahl der Antragsteller	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Anzahl der Tage	5	4	10	12	20	18	18	12	15	2	4	$\Sigma = 120$

Wie hoch ist die durchschnittliche Anzahl der persönlich vorsprechenden Antragsteller pro Tag?

$$\bar{x}_{AGA} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i * h_i}{\sum_{i=1}^n h_i}$$

$$\bar{x}_{AGA} = \frac{0 * 5 + 1 * 4 + 2 * 10 + 3 * 12 + 4 * 20 + 5 * 18 + 6 * 18 + 7 * 12 + 8 * 15 + 9 * 2 + 10 * 4}{120}$$

$$\bar{x}_{AGA} = 5 \text{ Antragsteller}$$

Beispiel 2:

Der Primärenergieverbrauch (PEV) pro Kopf (in t Steinkohle-Einheiten [SKE]) im Jahr 2000 ist für verschiedene Kontinente und Regionen der Welt in der folgenden Tabelle aufgelistet, ebenso wie die Anteile an der gesamten Weltbevölkerung von 6.058 Millionen Menschen und der Zahl der Einwohner in diesen Regionen:

Region	PEV/Kopf	Anteil	Einwohner [Mio.]
Europa	4,5	9,51%	576
Ehem. UDSSR	4,5	4,80%	291
Nordamerika	11,4	5,18%	314
Lateinamerika	1,4	8,57%	519
Afrika	0,5	13,11%	794
Asien, Australien	1,1	58,83%	3.564

Berechne den weltweiten durchschnittlichen Primärenergieverbrauch pro Kopf im Jahr 2000.

$$\bar{x}_{AGA} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i * h_i}{\sum_{i=1}^n h_i}$$

$$\bar{x}_{AGA} = \frac{4,5 * 576 + 4,5 * 291 + 11,4 * 314 + 1,4 * 519 + 0,5 * 794 + 1,1 * 3.564}{6.058}$$

$$\bar{x}_{AGA} = 2,067531$$

Alternativ:

$$\bar{x}_{AGR} = \sum_{i=1}^n x_i * h_i$$

$$\bar{x}_{AGR} = 4,5 * 0,0951 + 4,5 * 0,048 + 11,4 * 0,0518 + 1,4 * 0,0857 + 0,5 * 0,1311 + 1,1 * 0,5883$$

$$\bar{x}_{AGR} = 2,06713$$

- **Durchschnittlicher Jahreszinssatz**

Der durchschnittliche Jahreszinssatz ist der Durchschnitt aller einzelnen Jahreszinssätze – eine einfache Kennzahl für die Einträglichkeit (Rentabilität) einer mehrjährigen Geldanlage, deren Zinssatz sich jedes Jahr ändert.

Berechnet wird der durchschnittliche Jahreszinssatz als ungewogenes arithmetisches Mittel der einzelnen Jahreszinssätze: Die einzelnen Jahreszinssätze werden addiert und durch die Anzahl der Jahre geteilt. Dies liefert eine einfache Einschätzung, wie viele Zinsen eine Geldanlage im Durchschnitt pro Jahr erbringt.

Beispiel:

1.000 EUR werden für drei Jahre zinsbringend angelegt. Im ersten Jahr beträgt der Zinssatz 1,0 Prozent, im zweiten Jahr 2,0 Prozent und im dritten Jahr 6,0 Prozent.

Der durchschnittliche Jahreszinssatz ergibt sich aus der Summe der drei Zinssätze (9,0 Prozent), geteilt durch die Anzahl der Jahre (3), und beträgt damit glatte 3,0 Prozent.

Nicht im durchschnittlichen Jahreszins berücksichtigt wird Zinseszins, der entsteht, wenn Zinsen nicht ausgezahlt, sondern dem Anlagekapital gutgeschrieben und anschließend mitverzinst werden.

Auch Steuerabzüge gehen nicht in den durchschnittlichen Jahreszins ein; ebenso wenig, wann die einzelnen Zahlungsströme erfolgen. Es gibt in der Finanzmathematik aber weitere Durchschnittswerte, die diese Details mit berücksichtigen. Dazu gehört z.B. die Rendite (als interner Zinssatz).

1.5. Geometrisches Mittel

- Das geometrische Mittel $\bar{x}_G$ wird angewendet, wenn Einzelwerte sinnvoll durch Multiplikation verknüpft werden können. Dies ist beispielsweise bei der Berechnung durchschnittlicher Wachstumsraten, durchschnittlicher prozentualer Veränderungen oder durchschnittlicher Zinsen der Fall.
- Die Bestimmung des geometrischen Mittels ist nur sinnvoll für Merkmale, die auf einer metrischen Skala gemessen werden. Die Einzelwerte müssen positiv sein, da bei negativen Werten das geometrische Mittel nicht sinnvoll definiert ist.
- **Ungewogenes geometrisches Mittel**

Das ungewogene geometrische Mittel $\bar{x}_{GU}$ erhält man, wenn das geometrische Mittel aus den Einzelwerten einer Datenreihe ohne Berücksichtigung von Gewichtungsfaktoren berechnet wird.

Gegeben seien n Einzelwerte x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) eines Merkmals X . Für das ungewogene geometrische Mittel gilt dann:

$$\bar{x}_{GU} = \sqrt[n]{x_1 * x_2 * \dots * x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

x_i = Einzelwert i

$i = 1; 2; 3 \dots$

n = Anzahl der Einzelwerte

Bei den relevanten Einzelwerten x_i handelt es sich oftmals um jährliche Wachstumsfaktoren q_i , die sich wie folgt aus jährlichen Wachstumsraten p_i [%] ergeben:

$$q_i = 1 + p_i[\%]$$

Der mittlere bzw. durchschnittliche Wachstumsfaktor $\bar{q}_{GU}$ ist dann gleich dem ungewogenen geometrischen Mittel $\bar{x}_{GU}$ der jährlichen Wachstumsfaktoren q_i .

$$\bar{x}_{GU} = \bar{q}_{GU} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n q_i}$$

Für die durchschnittliche relative Wachstumsrate pro Jahr $\bar{p}$ gilt dann:

$$\bar{x}_{GU} = 1 + \bar{p}$$

$$\bar{p} = \bar{x}_{GU} - 1$$

$$\bar{q}_{GU} = 1 + \bar{p}$$

$$\bar{p} = \bar{q}_{GU} - 1$$

p_i = jährliche Wachstumsrate bzw. jährlicher Zinssatz (z. B. 3% bzw. 0,03)
 q_i = jährlicher Wachstumsfaktor bzw. jährlicher Zinsfaktor
 $\bar{p}$ = mittlere bzw. durchschnittliche Wachstumsrate bzw. mittlerer bzw. durchschnittlicher Zinssatz
 $\bar{q}_{GU}$ = mittlerer bzw. durchschnittlicher Wachstumsfaktor bzw. mittlerer bzw. durchschnittlicher Zinsfaktor

Beispiel 1:

Ein Unternehmen erzielte in den Jahren 2020 – 2024 folgende Umsätze:

Jahr	Umsatz [Mio. EUR]
2020	2,0
2021	2,4
2022	2,9
2023	2,7
2024	3,1

Berechne das durchschnittliche relative Umsatzwachstum pro Jahr.

Zur Lösung bestimmt man zunächst die jährlichen Wachstumsraten p_i [%] in Prozent des Vorjahresumsatzes und ermittelt daraus die jährlichen Wachstumsfaktoren $q_i = 1 + p_i$. Anschließend berechnet man aus den jährlichen Wachstumsfaktoren das ungewogene geometrische Mittel, d.h. den mittleren Wachstumsfaktor.

Jahr	Umsatz [Mio. EUR]	Jährliche Wachstumsrate in Prozent des Vorjahresumsatzes (p_i)	Wachstumsfaktor (q_i)
2020	2,0		
2021	2,4	+20,000000%	1,200000
2022	2,9	+20,833333%	1,208333
2023	2,7	-6,896552%	0,931034
2024	3,1	+14,814815%	1,148148

$$\bar{x}_{GU} = \bar{q}_{GU} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

$$\bar{x}_{GU} = \bar{q}_{GU} = \sqrt[4]{1,2 * 1,208333 * 0,931034 * 1,148148} = 1,11579092$$

$$\bar{p} = \bar{q}_{GU} - 1$$

Durchschnittliches relatives Umsatzwachstum pro Jahr = 11,579092%

Beispiel 2:

Herr Meyer trägt 1.000 EUR am 01.01.2021 zur Bank. In den ersten beiden Jahren bekommt er 4%, in den folgenden drei Jahren 5,5% und im 6. Jahr 5% Zinsen.

Auf wieviel EUR ist sein Kapital nach 6 Jahren angewachsen?

Bei welcher konstanten Durchschnittsverzinsung hätte Herr Meyer das gleiche Endkapital erhalten?

Jahr	Jährliche Wachstumsrate in Prozent (p _i)	Wachstumsfaktor (q _i)
2021	+4%	1,040
2022	+4%	1,040
2023	+5,5%	1,055
2024	+5,5%	1,055
2025	+5,5%	1,055
2026	+5%	1,050

$$\bar{x}_{GU} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

$$\bar{x}_{GU} = \sqrt[6]{1,04 * 1,04 * 1,055 * 1,055 * 1,055 * 1,05} = 1,0491451068$$

$$\bar{p} = \bar{x}_{GU} - 1$$

$$\text{Konstante Durchschnittsverzinsung} = 4,91451068\%$$

Gegenprobe:

$$K_n = K_0 * (1 + i_{nom})^n$$

K_n = Endkapital

K_0 = Anfangskapital, Nominalkapital

n = Laufzeit in Jahren (inkl. gebrochene Jahreszahlen)

i_{nom} = nomineller Jahreszinssatz

$$K_n = 1.000 \text{ EUR} * (1 + 0,0491451068)^6 = 1.333,56244476 \text{ EUR}$$

$$K_n = 1.000 \text{ EUR} * 1,04 * 1,04 * 1,055 * 1,055 * 1,055 * 1,05 = 1.333,56244476 \text{ EUR}$$

- **Gewogenes geometrisches Mittel**

Das gewogene geometrische Mittel $\bar{x}_{GG}$ erhält man, wenn das geometrische Mittel aus den Einzelwerten einer Datenreihe unter Berücksichtigung von Gewichtungsfaktoren berechnet wird.

$$\bar{x}_{GG} = \sqrt[\sum h]{x_1^{h_1} * x_2^{h_2} * ... * x_n^{h_n}} = \sqrt[\sum h]{\prod_{i=1}^n x_i^{h_i}}$$

x_i = Einzelwert i

$i = 1; 2; 3 \dots$

n = Anzahl der Einzelwerte

h_i = relative oder absolute Häufigkeit des Einzelwertes x_i

Durch die Exponenten kann den Einzelwerten x_i eine bestimmte Gewichtung zugewiesen werden, die die Berechnung des geometrischen Mittels beeinflusst.

Beispiel:

Berechne das durchschnittliche Wachstum eines Unternehmens über drei Jahre, wobei das Wachstum in jedem Jahr unterschiedlich stark gewichtet wird:

Jahr 1: Wachstum in Höhe von 10%, Gewichtung = 2

Jahr 2: Wachstum in Höhe von 5%, Gewichtung = 1

Jahr 3: Wachstum in Höhe von 15%, Gewichtung = 3

$$\bar{x}_{GG} = \sqrt[\sum h]{\prod_{i=1}^n x_i^{h_i}}$$

$$\bar{x}_{GG} = \sqrt[6]{1,1^2 * 1,05^1 * 1,15^3} = 1,11603555766$$

Durchschnittliche gewichtete Wachstumsrate = 11,603555766%

Alternativ:

$$\bar{x}_{GG} = \sqrt[1]{1,1^{\frac{2}{6}} * 1,05^{\frac{1}{6}} * 1,15^{\frac{3}{6}}} = 1,11603555766$$

Durchschnittliche gewichtete Wachstumsrate = 11,603555766%

1.6. Harmonisches Mittel

- Das harmonische Mittel $\bar{x}_H$ wird angewendet, wenn der Mittelwert von Verhältniszahlen gesucht ist, wie beispielsweise $\frac{km}{h}$, $\frac{m}{sec}$, $\frac{Preis}{Produkt}$, $\frac{Preis}{m^2}$, $\frac{Selbstkosten}{Stück}$, $\frac{Elektroenergieverbrauch (EEV)}{1.000 \text{ EUR Produktion}}$, $\frac{Bearbeitungszeit in Minuten}{Stück}$, ...
- Die Bestimmung des harmonischen Mittels ist nur sinnvoll für Merkmale, die auf einer metrischen Skala gemessen werden. Die Einzelwerte müssen positiv sein, da bei negativen Werten das harmonische Mittel nicht sinnvoll definiert ist.
- Ungewogenes harmonisches Mittel**

Das ungewogene harmonische Mittel $\bar{x}_{HU}$ erhält man, wenn der Durchschnitt von Verhältniszahlen von Einzelwerten ohne Berücksichtigung von Gewichtungsfaktoren berechnet wird.

Gegeben seien n Einzelwerte x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) eines Merkmals X . Für das ungewogene harmonische Mittel gilt dann:

$$\bar{x}_{HU} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

x_i = Einzelwert i

$i = 1; 2; 3 \dots$

n = Anzahl der Einzelwerte

Beispiel 1:

Bei Geschwindigkeiten von $50 \frac{km}{h}$ und $100 \frac{km}{h}$ wird jeweils die gleiche Distanz zurückgelegt. Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit.

$$\bar{x}_{HU} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

$$\bar{x}_{HU} = \frac{2}{\frac{1}{50 \frac{km}{h}} + \frac{1}{100 \frac{km}{h}}} = 66,6 \frac{km}{h}$$

Wäre die Distanz unterschiedlich, müsste das gewogene harmonische Mittel berechnet werden.

Beispiel 2:

Herr Meyer kauft täglich für 24 Euro Hanfpäckchen, wobei der Preis variiert. Herr Meyer möchte wissen, wieviel er im Mittel pro Päckchen bezahlt und dokumentiert dazu seine Einkäufe an 5 Tagen:

Tag	Anzahl Hanfpäckchen	Preis pro Hanfpäckchen
1	5	4,80 EUR
2	4	6,00 EUR
3	6	4,00 EUR
4	8	3,00 EUR
5	3	8,00 EUR

$$\bar{x}_{HU} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

$$\bar{x}_{HU} = \frac{5}{\frac{1}{4,8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8}} = \frac{5}{1,08\bar{3}} = 4,61538461538 \text{ EUR}$$

- **Gewogenes harmonisches Mittel**

Das gewogene harmonische Mittel $\bar{x}_{HG}$ erhält man, wenn der Durchschnitt von Verhältniszahlen von Einzelwerten mit Berücksichtigung von Gewichtungsfaktoren berechnet wird.

$$\bar{x}_{HG} = \frac{g_1 + g_2 + \dots + g_n}{\frac{g_1}{x_1} + \frac{g_2}{x_2} + \dots + \frac{g_n}{x_n}} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i}{\sum_{i=1}^n \frac{g_i}{x_i}}$$

Beispiel:

Bei einer Geschwindigkeit von $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ werden 70 km und bei einer Geschwindigkeit von $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ werden 110 km zurückgelegt. Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit.

$$\bar{x}_{HG} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i}{\sum_{i=1}^n \frac{g_i}{x_i}}$$

$$\bar{x}_{HG} = \frac{70 \text{ km} + 110 \text{ km}}{\frac{70 \text{ km}}{50 \frac{\text{km}}{\text{h}}} + \frac{110 \text{ km}}{100 \frac{\text{km}}{\text{h}}}} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

1.7. Durchschnittliche absolute und durchschnittliche relative Änderung von Zahlenreihen

- **Relative Änderung von Einzelschritten**

$$\text{Relative Änderung} = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i}$$

Beispiel:

$$\text{Relative Änderung} = \frac{21.007 - 20.198}{20.198} = 0,04005347064 = 4,005347064\%$$

- **Durchschnittliche absolute Änderung**

$$\text{Durchschnittliche absolute Änderung} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} - x_i$$

$$\text{Durchschnittliche absolute Änderung} = \frac{x_n - x_1}{n-1}$$

Beispiel:

2010	850	(i = 1)
2011	965	(i = 2)
2012	740	(i = 3)
2013	811	(i = 4)
n = 4		

$$\text{Durchschnittliche absolute Änderung} = \frac{1}{3} * ((965 - 850) + (740 - 965) + (811 - 740)) = -13$$

$$\text{Durchschnittliche absolute Änderung} = \frac{811 - 850}{4 - 1} = -13$$

- **Durchschnittliche relative Änderung**

Die durchschnittliche relative Änderung ist identisch mit der durchschnittlichen Wachstumsrate.

$$\text{Durchschnittliche relative Änderung} = \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}} - 1$$

x_n = Endwert

x_1 = Anfangswert

$n - 1$ = Anzahl der Schritte (nicht die Anzahl der Datenpunkte n)

Beispiel:

2010	100
2011	120
2012	144

$$\text{Durchschnittliche relative \u00c4nderung} = \sqrt[3-1]{\frac{144}{100}} - 1 = 0,2 = 20\%$$

5.4. Logarithmische Normalverteilung

- Die logarithmische Normalverteilung (= Lognormalverteilung) ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Variable, die nur positive Werte annehmen kann. Eine Zufallsvariable X ist dann lognormalverteilt, wenn die mit dem natürlichen Logarithmus transformierte Zufallsvariable $G = \ln(X)$ normalverteilt ist. Die Zufallsvariable X ist also dann lognormalverteilt, wenn ihr natürlicher Logarithmus $\ln(X)$ normalverteilt ist.

Ist die Zufallsvariable A lognormalverteilt, ist ihr natürlicher Logarithmus $\ln(A)$ normalverteilt.

Ist die Zufallsvariable B normalverteilt, ist ihre e-Funktion e^B lognormalverteilt. Der Satz "*Die Zufallsvariable X ist dann lognormalverteilt, wenn ihr natürlicher Logarithmus $\ln(X)$ normalverteilt ist*" gilt auch in diesem Fall:

$$X \equiv e^B | \ln$$

$$\ln(X) = \ln(e^B) = B * \ln(e) = B * 1 = B$$

$\Rightarrow$ Da B per Annahme normalverteilt ist, ist auch $\ln(X)$ normalverteilt.

Die Lognormalverteilung ist somit eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung für positive Werte ($x > 0$), deren Logarithmus normalverteilt ist. Sie ist rechtsschief (= linkssteil) und hat einen langen Ausläufer nach rechts.

- Wenn die Ausgangszufallsvariable $y = f(x)$ lognormalverteilt ist, ist die transformierte Zufallsvariable $g = \ln(y) = \ln(f(x))$ normalverteilt.

Die Transformation einer lognormalverteilten Zufallsvariable y durch die Logarithmusfunktion $\ln(y)$ führt zu einer Normalverteilung.

Zusammenhänge:

Ist

$y = f(x)$ lognormalverteilt, dann ist

$g = \ln(y) = \ln(f(x))$ normalverteilt.

Wenn eine Zufallsvariable $y = f(x)$ lognormalverteilt ist, ist ihr natürlicher Logarithmus $\ln(y)$ bzw. $\ln(f(x))$ normalverteilt. Sei $y = f(x)$ eine lognormalverteilte Zufallsvariable. Durch die Transformation $g = \ln(y) = \ln(f(x))$ wird die Variable auf den Logarithmus abgebildet. Nach der Definition der Lognormalverteilung ist die transformierte Variable g normalverteilt.

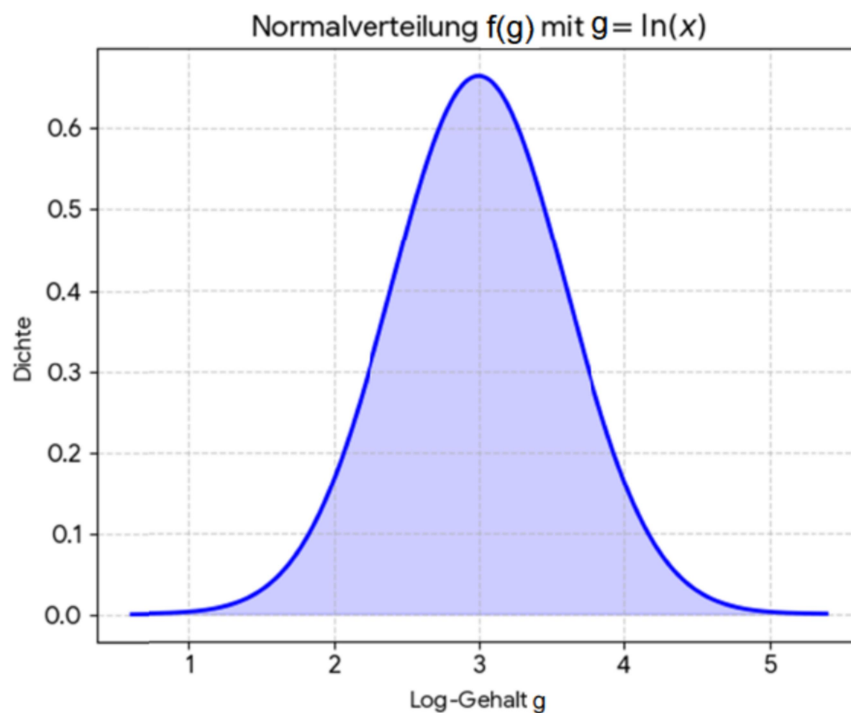
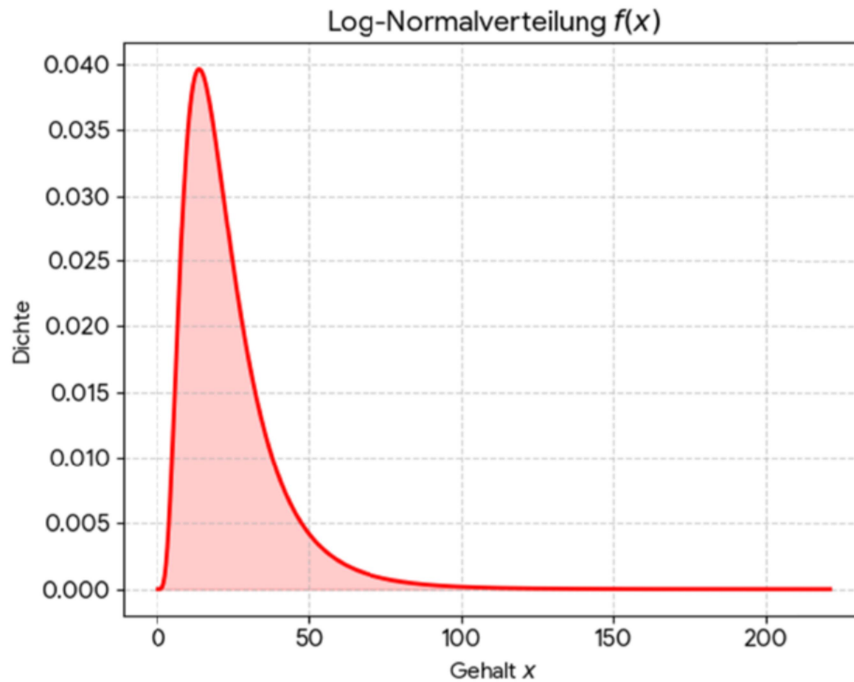
$$g = \ln(f(x)) \quad | e^{(\cdot)}$$

$$e^g = e^{\ln(f(x))}$$

$$g = \log_e(e^{\ln(f(x))}) = \ln(e^{\ln(f(x))}) = \ln(f(x))$$

Lognormalverteilung $y = f(x)$: Beschreibt Daten, die nur positive Werte annehmen können (Wertebereich: $x > 0$) und eine Rechtsschiefe aufweisen.

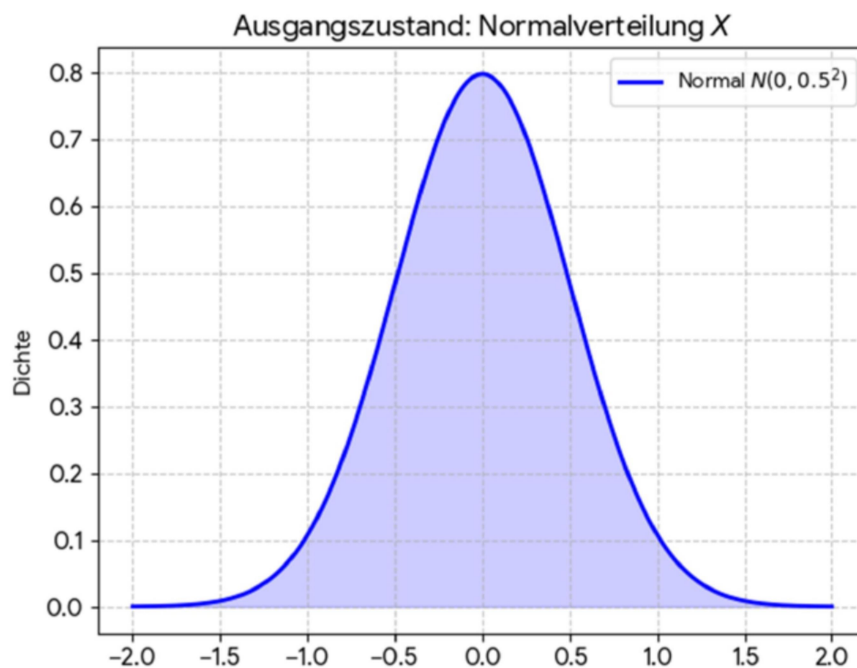
Normalverteilung $g = \ln(y) = \ln(f(x))$: Beschreibt Daten, die beliebige Werte annehmen können (Wertebereich: $-\infty < x < +\infty$) und als Glockenkurve symmetrisch um den Mittelwert verteilt sind.

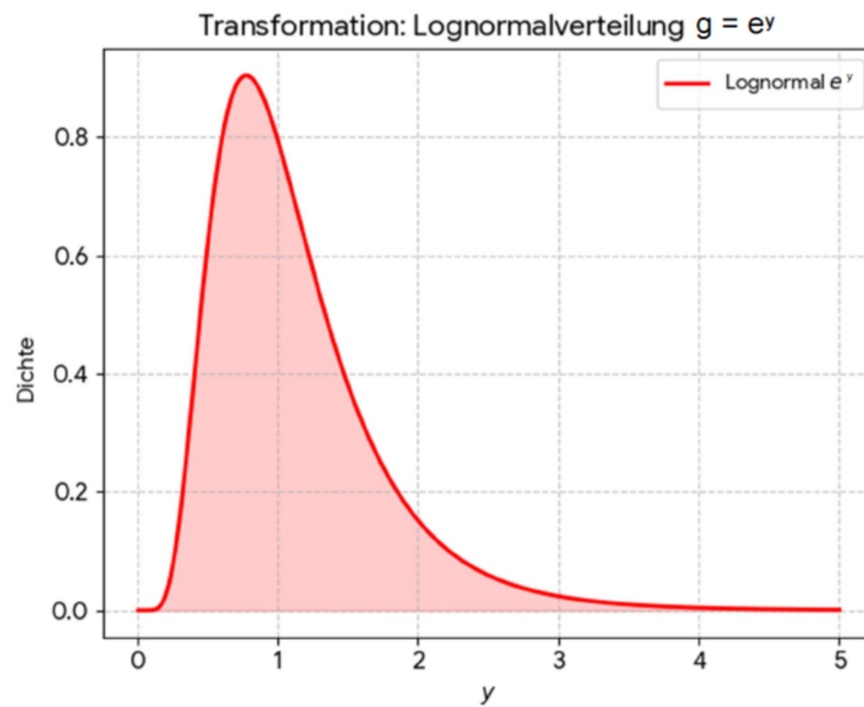


- Wenn die Ausgangszufallsvariable $y = f(x)$ normalverteilt ist, ist die transformierte Zufallsvariable $g = e^y = e^{f(x)}$ lognormalverteilt.

Die Transformation einer normalverteilten Zufallsvariable y durch die Exponentialfunktion $g = e^y$ führt zu einer Lognormalverteilung.

Während die Normalverteilung theoretisch von $-\infty$ bis $+\infty$ definiert ist, bildet die Transformation e^y für die Dichtefunktion alle Werte im Intervall $]0; +\infty[$ ab. Die Lognormalverteilung beginnt daher immer bei 0. Da die Exponentialfunktion e^y für alle reellen Zahlen y (inklusive sehr kleiner negativer Zahlen) stets einen Wert größer als 0 liefert, ist der Wertebereich von g immer auf das Intervall $]0; +\infty[$ beschränkt. Durch $g = e^y$ werden die negativen y -Werte "umgeklappt" und in der Dichtefunktion in den Bereich nahe 0 gedrängt. Die hohen positiven y -Werte werden hingegen durch das exponentielle Wachstum in der Dichtefunktion stark auseinandergezogen, was den flachen Auslauf nach rechts erzeugt.



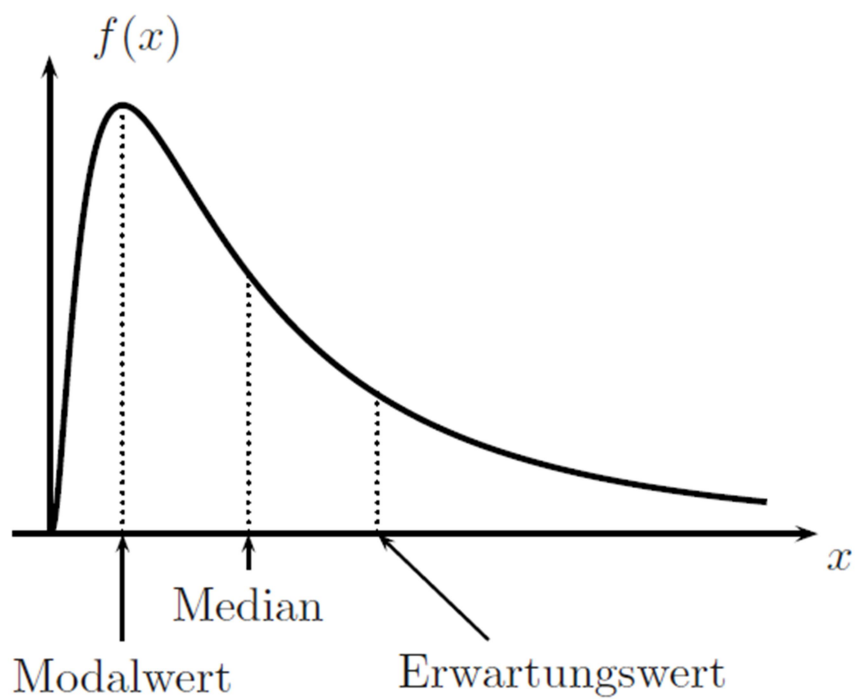


- **Dichtefunktion**

$$f_{LN}(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma * x * \sqrt{2 * \pi}} * e^{-\frac{1}{2} * \left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$x > 0$$

Dichtefunktion der Dichte der Lognormalverteilung:



Die Dichtefunktion der Lognormalverteilung ist rechtsschief, d.h. sie steigt schnell an und fällt langsam ab. Sie eignet sich zur Modellierung von Verteilungen mit vielen kleinen Werten auf der linken Seite und wenigen großen Werten auf der rechten Seite der x-Achse. Klassischer Anwendungsfall sind Einkommensverteilungen. So gibt es sehr wenige hochdotierte Positionen, wohingegen ein Großteil der Einkommen aus Tätigkeiten mit eher geringem Einkommen resultiert. Extrem niedrige Einkommen werden dann wieder schnell seltener.

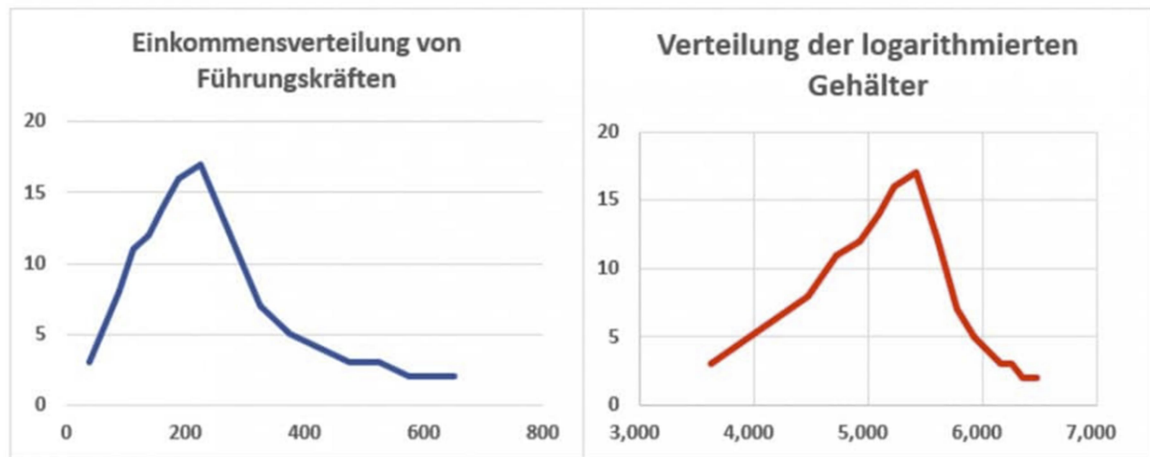
Beim Maximum der Dichte der Lognormalverteilung liegt der Modalwert $e^{\mu-\sigma^2}$. Rechts vom Modalwert liegt der Median e^{μ} ; an dieser Stelle wird die Fläche unter der Dichte halbiert. Rechts vom Median liegt der Erwartungswert (= Schwerpunkt) $e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ der Verteilung. Die Funktionsparameter μ und σ^2 der Lognormalverteilung können anders als bei der Normalverteilung nicht als Erwartungswert und Varianz der Verteilung interpretiert werden, da sie Erwartungswert und Varianz der logarithmierten Variablen sind.

Beispiel:

Folgende Häufigkeiten für Gehaltsklassen von Führungskräfte im Bankensektor wurden erhoben:

Gehaltsklasse	Klassenmitte x	log. Klassenmitte g=ln(x)	Häufigkeiten
bis 75	37,5	3,624	3
75-100	87,5	4,472	8
100-125	112,5	4,723	11
125-150	137,5	4,924	12
150-175	162,5	5,091	14
175-200	187,5	5,234	16
200-250	225,5	5,418	17
250-300	275,5	5,619	12
300-350	325,5	5,785	7
350-400	375,5	5,928	5
400-450	425,5	6,053	4
450-500	475,5	6,164	3
500-550	525,5	6,264	2
550-600	575,5	6,355	1
>600	650	6,477	2

Die linke Grafik zeigt die Häufigkeitsverteilung der Gehälter als blaue Kurve an; deutlich ist die schiefe Verteilung erkennbar. Die Daten sind lognormalverteilt. Logarithmiert man die Klassenmittel ergibt sich die rote Kurve in der rechten Grafik. Die Daten sind normalverteilt (Glockenkurve).

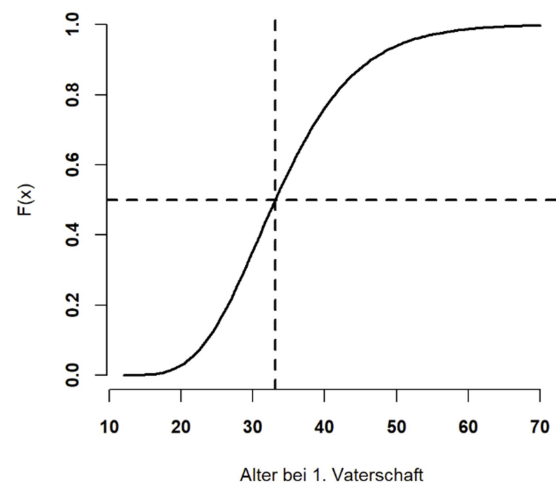
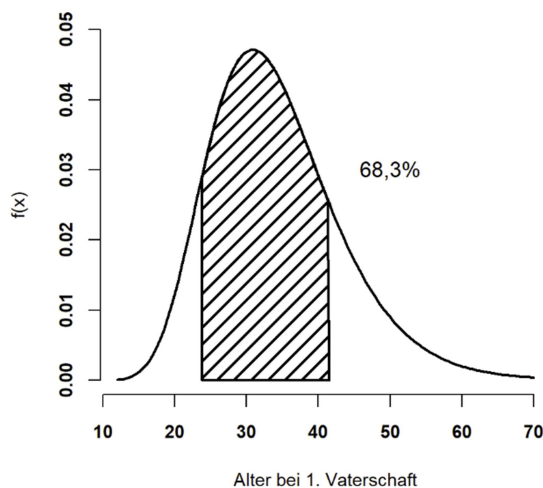


Wenn eine Zufallsvariable x (= Gehalt) lognormalverteilt ist, dann ist ihr natürlicher Logarithmus $g = \ln(x)$ normalverteilt (Glockenkurve). Die folgende Abbildung verdeutlicht exemplarisch den Unterschied zwischen der rechtsschiefen Verteilung der tatsächlichen Gehälter x und der symmetrischen Glockenkurve der logarithmierten Gehälter g .

- **Verteilungsfunktion**

Die Verteilungsfunktion der Lognormalverteilung kann zurückgeführt werden auf die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung. Daher gilt für die Verteilungsfunktion F der lognormalverteilten Zufallsvariablen X :

$$F_{LN}(x|\mu, \sigma) = \Phi * \frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}$$



- **Erwartungswert**

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

- **Varianz**

$$VAR(X) = e^{2\mu + \sigma^2} * (e^{\sigma^2} - 1)$$

- Wenn $X = \frac{a}{b}$ lognormalverteilt und $b > 0$ eine Konstante ist, dann ist auch a lognormalverteilt und $\ln(a)$ ist normalverteilt.

Durch Multiplikation einer Lognormalverteilung mit einer positiven Konstante bleibt die Form der Verteilung erhalten; lediglich die Parameter verschieben sich.

- **Aktienkurs-Modellierung**

Zunächst wird der Unterschied zwischen diskreten und stetigen Renditen erläutert.

Bei diskreter Verzinsung mit m Zinsperioden pro Jahr lautet die Formel für das Endkapital S_t nach n Jahren bei einem Anfangskapital S_0 und einem Nominalzinsatz r :

$$S_t(\text{diskret}) = S_0 * \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m*n}$$

Um von der diskreten zur stetigen Verzinsung zu gelangen, lässt man die Häufigkeit der Zinsgutschriften m über alle Grenzen wachsen ($m \rightarrow \infty$). Das Kapital wird also unendlich oft pro Jahr verzinst

$$S_t(\text{stetig}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(S_0 * \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m*n} \right)$$

$$S_t(\text{stetig}) = S_0 * \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m*n}$$

Für die Eulersche Zahl gilt:

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Substitution von $x = \frac{m}{r}$ führt zu:

$$e = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}$$

$$S_t(\text{stetig}) = S_0 * \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m*n}$$

$$S_t(\text{stetig}) = S_0 * \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r} * n * r}$$

$$S_t(\text{stetig}) = S_0 * e^{n*r}$$

$$S_t(\text{stetig}) = S_t = S_0 * e^{r*n}$$

$$e^{r*n} = \left(\frac{S_t}{S_0}\right) | \ln$$

$$\ln(e^{r*n}) = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$$

$$\ln((e^r)^n) = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$$

$$n * \ln(e^r) = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$$

$$n * r = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$$

$$r = \frac{1}{n} * \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \frac{1}{n} * (\ln(S_t) - \ln(S_0))$$

Kernaussage: Aktienkurse sind lognormalverteilt.

Über identische Betrachtungsperioden im Zeitablauf (z.B. bei jährlicher Erhebung) sind bei einer Aktie die diskrete Renditen und die stetigen Renditen normalverteilt, während die Aktienkurse lognormalverteilt sind. Im Folgenden werden nur stetige Renditen r betrachtet.

Renditen bewegen sich symmetrisch um einen Mittelwert und können sowohl positive als auch negative Ausprägungen annehmen. Insoweit kann für Renditen eine Normalverteilung unterstellt werden.

Für die stetige Rendite einer Aktie vom Zeitpunkt $t - 1$ zum Zeitpunkt t (Einperiodenfall) gilt:

$$r = \frac{1}{n} * \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \frac{1}{1} * \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

r = stetige Periodenrendite der Aktie

n = Laufzeit in Jahren

S_t = Aktienkurs am Periodenende

S_{t-1} = Aktienkurs der Vorperiode; dieser Aktienkurs ist gegeben

$\frac{S_t}{S_{t-1}}$ = Wachstumsfaktor

$$r = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \Leftrightarrow e^r = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

$$S_t = S_{t-1} * e^r$$

$$S_t(r) = S_{t-1} * e^r$$

Wird für die stetige Rendite r (= normalverteilte Zufallsvariable) eine Normalverteilung mit μ und σ^2 angenommen, so ist

$$e^{S_t(r)}$$

lognormalverteilt mit einem Aktienkurs-Erwartungswert

$$E(S_t) = S_{t-1} * e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

und einer Varianz

$$VAR(S_t) = e^{2\mu + \sigma^2} * (e^{\sigma^2} - 1)$$

Der Aktienkurs ist mithin lognormalverteilt und damit rechtsschief. Die Annahme, dass Renditen normalverteilt und Aktienkurse lognormalverteilt sind, ist zentraler Baustein des Black-Scholes-Optionspreismodells.

Hinweis: Folgender Rechenweg wäre falsch, weil nur jährlicher Zinszuschlag unterstellt werden würde.

$$r = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1$$

$$S_t = S_{t-1} * (r + 1)$$

Beispiel:

$$S_t = 6,54 \text{ GE}$$

$$S_{t-1} = 6,00 \text{ GE}$$

$$r = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1 = \frac{6,54}{6,00} - 1 = 9\%$$

Bei stetiger Verzinsung beträgt r jedoch 8,617769624%.

$$r = \frac{1}{n} * \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \frac{1}{1} * \ln\left(\frac{6,54}{6,00}\right) = 8,617769624\%$$

Um den erwarteten Aktienkurs zu berechnen, wird der stochastische Prozess der geometrischen Brownschen Bewegung genutzt. Die geometrische Brownsche Bewegung ist Grundlage des Black-Scholes-Modells und modelliert Aktienkurse, indem angenommen wird, dass die prozentualen Renditen (und nicht die absoluten Preisänderungen) unabhängig voneinander sind und normalverteilten Schwankungen unterliegen. Über die Lognormalverteilung der Aktienkurse werden negative Aktienkurse ausgeschlossen.

$$S_t = S_0 * e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * n + \sigma * \sqrt{n} * Z}$$

S_t = Aktienkurs nach n Jahren

S_0 = Aktienkurs am Periodenbeginn; dieser Aktienkurs ist gegeben

r = Erwartete jährliche Rendite (= Drift)

σ = Jährliche Volatilität der Aktie (= Stärke der zufälligen Marktschwankungen)

n = Laufzeit in Jahren

Z = Z-Wert der Standardnormalverteilung

- Aufgabe 1:

Die Lebensdauer X [Stunden] eines elektronischen Bauteils ist lognormalverteilt. Der Logarithmus der Lebensdauer $Y = \ln(X)$ ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 4$ und der Standardabweichung $\sigma = 0,5$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lebensdauer des Bauteils zwischen $e^4 \approx 54,6$ Stunden und $e^4 * \sqrt{e} \approx 90$ Stunden liegt, also der Bereich $P(55 \leq X \leq 90)$.

$$e^4 = 54,6$$

$$\ln(e^4) = 4$$

$$e^4 * \sqrt{e} = 90$$

$$\ln(e^4 * \sqrt{e}) = \ln(e^{4,5}) = 4,5$$

$$z_1 = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z_1 = \frac{4 - 4}{0,5} = 0$$

$$z_2 = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z_2 = \frac{4,5 - 4}{0,5} = 1$$

$$P(0 \leq X \leq 1) = 0,8413 - 0,5 = 0,3413$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer zwischen 55 und 90 Stunden liegt, beträgt 34,13%

- Beispiel 2:

- (i) Es soll der Kurs einer Aktie nach einem halben Jahr prognostiziert werden. Folgende Werte sind gegeben:

$$S_0 = 100 \text{ EUR}$$

$$r = 8\%$$

$$\sigma = 25\%$$

$$n = 0,5 \text{ Jahre}$$

- (ii) Welcher Kurs würde bei vorgenannten Parametern mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% nicht unterschritten werden?

(i)

$$S_t = S_0 * e^{r*n}$$

$$S_t = 100 * e^{0,08*0,5}$$

$$S_t = 104,081077419 \text{ EUR}$$

(ii)

Wenn der Kurs mit 95 % Wahrscheinlichkeit nicht unterschritten werden soll, dürfen nur 5% der Werte darunter liegen. Gesucht ist der Kurs, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% unterschritten wird. Der entsprechende Z-Wert ergibt sich aus einem einseitig linksseitigen Test in Höhe von $-1,645$.

$$S_t = S_0 * e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * n + \sigma * \sqrt{n} * Z}$$

$$S_t = 100 * e^{\left(0,08 - \frac{0,25^2}{2}\right) * 0,5 + 0,25 * \sqrt{0,5} * -1,645} = 76,6115249906 \text{ EUR}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt der Kurs nach einem halben Jahr über 76,60 EUR.